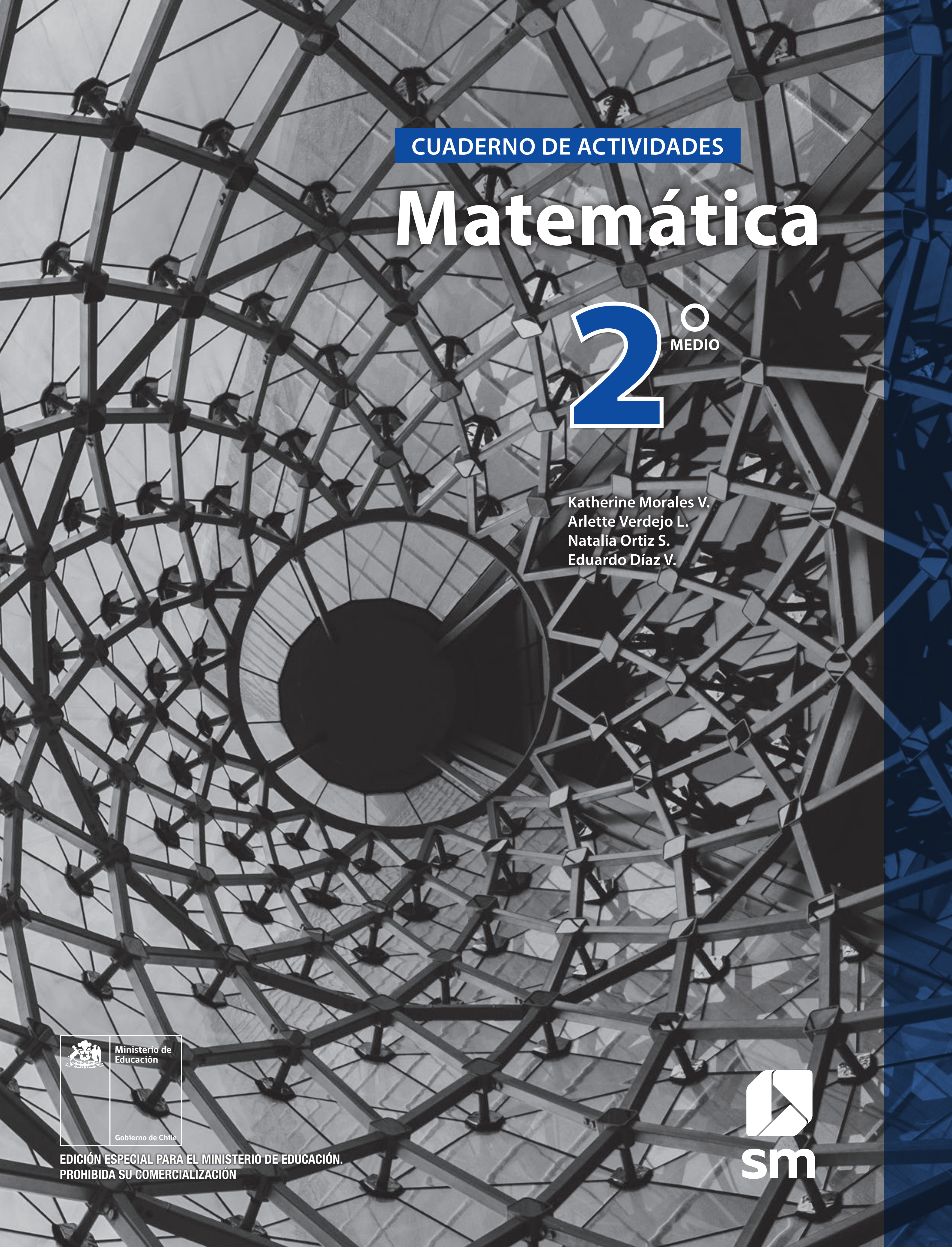


CUADERNO DE ACTIVIDADES

# Matemática

## 2° MEDIO

Katherine Morales V.
Arlette Verdejo L.
Natalia Ortiz S.
Eduardo Díaz V.

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile



sm

# 2°
**medio**

# MATEMÁTICA
## CUADERNO DE ACTIVIDADES

Eduardo Díaz Valenzuela
Licenciado en Educación Matemática y Computación
Profesor de Estado en Matemática y Computación

Natalia Ortiz Solís
Licenciada en Educación Matemática y Computación
Profesora de Estado en Matemática y Computación

Katherine Morales Valderrama
Licenciada en Educación Matemática y Computación

Arlette Verdejo Lagunas
Profesora de Educación Básica con mención en Matemática

En el desarrollo del Cuaderno de ejercicios Matemática 2° medio SM, participó el siguiente equipo:


**Dirección editorial**
Arlette Sandoval Espinoza

**Coordinación área matemática**
Lucía Donoso Suárez

**Edición**
Arlette Verdejo Lagunas

**Elaboración de contenido**
Eduardo Díaz Valenzuela
Natalia Ortiz Solís
Katherine Morales Valderrama
Arlette Verdejo Lagunas

**Solucionario**
Yaritza Dinamarca Castro
Manuel Rebolledo Hernández
Claudia Moraga Valenzuela

**Corrección de estilo y prueba**
Víctor Navas Flores

**Dirección de arte y diseño**
Carmen Gloria Robles Sepúlveda

**Coordinación de diseño**
Gabriela de la Fuente Garfias

**Diseño**
Williams Gálvez Baettig

**Diagramación**
Mauricio Fresard Lemmermann

**Ilustraciones**
Archivo SM

**Fotografías**
Archivo de imágenes SM
Shutterstock

**Iconografía**
Vinka Guzmán Tacla

**Jefatura de planificación**
Andrea Carrasco Zavala

Este texto corresponde al segundo año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N°439/489, del Ministerio de Educación de Chile.





ISBN: 978-956-403-079-1 / Depósito legal: 2020-A-10134

Segundo año de uso facultativo.
Cantidad de uso autorizada: 204 053
Cantidad de ejemplares impresos: 204 053




En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

# ÍNDICE

Lección 1

# Los números reales

## El conjunto de los irracionales ($\mathbb{Q}^*$)

**1.** Completa la tabla con ✔ si el número pertenece al conjunto o con ✘ si no pertenece.

| Número | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}^*$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5$ | | | | | |
| $2{,}0\overline{36}$ | | | | | |
| $2\sqrt{49}$ | | | | | |
| $\sqrt{5}$ | | | | | |
| $-6$ | | | | | |

**2.** ◆ Da 4 ejemplos de cada conjunto numérico.

a. Naturales ______________________________

b. Enteros ______________________________

c. Racionales ______________________________

d. Irracionales ______________________________

e. Reales ______________________________

**3.** ◆ Analiza las siguientes expresiones sabiendo que "*a*" es un número par positivo. Marca con una ✘ las que representan siempre un número irracional.

a. $\frac{\sqrt{a}}{a}$

b. $\sqrt{\frac{a}{2a}}$

c. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

d. $\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$

e. $-\frac{1}{2}\sqrt{81a}$

f. $\sqrt{a} + \sqrt{a}$

**4.** ◆ Analiza cada afirmación. Escribe V o F según corresponda. Justifica tu elección en cada caso.

a. ________ Todo número entero es un racional.

b. ________ La diferencia ente dos irracionales es un número irracional.

c. ________ El cociente entre dos racionales es un número racional.

# Calcular en $\mathbb{R}$

**1.** Reduce aplicando la descomposición de raíces.

**a.** $\sqrt{54}$

**b.** $-\sqrt{180}$

**c.** $\sqrt{162}$

**d.** $-\sqrt{0{,}00\overline{3}}$

**e.** $\sqrt{\dfrac{1{,}\overline{6}}{1{,}\overline{3}}}$

**f.** $\sqrt{\dfrac{405}{81}}$

**2.** Resuelve.

**a.** $\sqrt{3{,}2} \cdot \sqrt{20}$

**b.** $\sqrt{72} : \sqrt{50}$

**c.** $-\sqrt{8} \cdot \sqrt{31{,}25}$

**d.** $\sqrt{40} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

**e.** $-\sqrt{28} : \sqrt{175}$

**f.** $\sqrt{45} : \sqrt{80}$

**3.** ◆ ¿Qué propiedades se cumplen en la multiplicación de números irracionales? Argumenta cada una con un ejemplo.

**a.** Clausura ____________________

**b.** Conmutatividad ____________________

**c.** Asociatividad ____________________

**d.** Elemento neutro ____________________

**e.** Elemento inverso ____________________

**4.** Reduce las raíces y resuelve.

**a.** $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$

**b.** $-2\sqrt{12} + \sqrt{3,63} - \sqrt{27}$

**c.** $\sqrt{245} - \sqrt{\frac{9}{100}} \cdot \sqrt{45} + \frac{\sqrt{1600}}{50} \cdot \sqrt{180}$

**d.** $\sqrt{18} + \sqrt{24} - \sqrt{54} - \sqrt{32}$

**5.** ◆ Expresa cada raíz usando solo *a*, *b* y *c*.

$a = \sqrt{2}$ , $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$

**a.** $\sqrt{6}$

**b.** $\sqrt{15}$

**c.** $\sqrt{100}$

**d.** $\sqrt{18}$

**e.** 10

**f.** $2\sqrt{24}$

**g.** $\sqrt{72}$

**h.** $\sqrt{11,25}$

**i.** $\sqrt{60}$

**j.** $\sqrt{135}$

**k.** $\sqrt{3,6}$

**l.** $\sqrt{1,5}$

6. ◆ Analiza cada expresión y verifica si se cumple o no.

a. $\sqrt{a} + b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

c. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - \sqrt{ab} + b$

7. ◆ Descubre los errores y corrige.

$\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

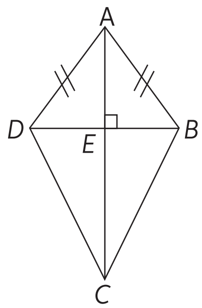
$= \sqrt{6} + \sqrt{9}$

$= \sqrt{54}$

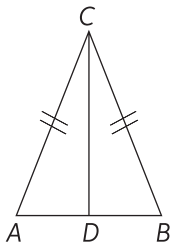
$= 3\sqrt{6}$

8. ◆ Calcula el perímetro de cada figura y explica cómo lo hiciste.

a. AB = $\sqrt{3}$, DB = 7, EC = 9




b. AB = 12, DC = 6




9. ◆ Explica por qué $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

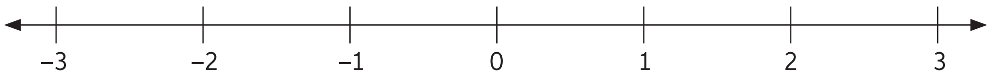
10. ◆ ¿Para qué valores se cumple $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p + q}$?

11. ◆ Crea un problema en que se utilicen raíces $\sqrt{6}$ y $\sqrt{24}$ e intercambialo con un compañero para que lo resuelva. Luego, comenta qué diferencia tuvieron las creaciones y respondan: ¿qué nuevas ideas obtuvieron al intercambiar sus problemas?

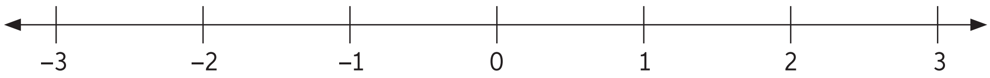
# Aproximación de números irracionales

**1.** Utilizando regla y compás, ubica en la recta numérica las siguientes raíces cuadradas.

**a.** $\sqrt{7}$




**b.** $\sqrt{2}$




**2.** ◆ Compara y completa con <, > o = según corresponda.

**a.** $\sqrt{8}$ ________ $\sqrt{14}$

**b.** $\pi$ ________ $3{,}\overline{1}$

**c.** $2\sqrt{3}$ ________ $3\sqrt{2}$

**d.** $\sqrt{2} - 4$ ________ $-\sqrt{3}$

**e.** $\sqrt{3} - 5$ ________ $\sqrt{5} - 3$

**f.** $\sqrt{82}$ ________ $\sqrt{5} + 9$

**3.** Aproxima los siguientes números irracionales.

**a.** $\sqrt{6}$

**b.** $-\sqrt{10}$

**c.** $\sqrt{20}$

**d.** $3\sqrt{0{,}\overline{5}}$

**e.** $-4\sqrt{5}$

**f.** $\sqrt{0{,}08}$

# Orden y ubicación de números en la recta numérica

**1.** Calcula el resultado. Luego, redondea a la décima y determina el error absoluto con calculadora.

**a.** $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{15}$

**b.** $-\sqrt{14} + 3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$

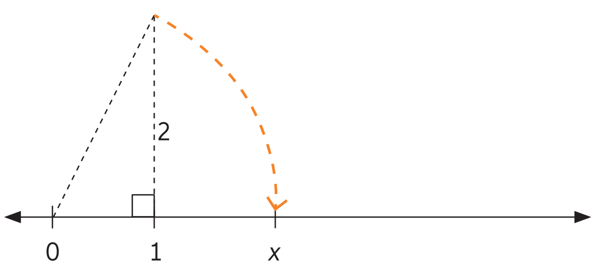
**c.** $3\sqrt{2} : (6\sqrt{6})$

**d.** $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{32}$

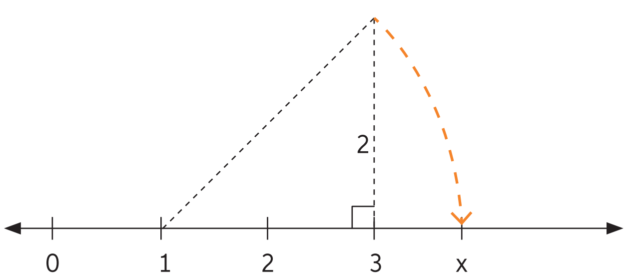
**2.** ◆ La diagonal de una fotografía cuadrada mide 30 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

**3.** Identifica el número real representado por *x* en cada caso. Considera que el trazo naranjo corresponde a un arco de circunferencia.

**a.** $x =$ ________




**b.** $x =$ ________



## Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

**1.** ¿Cuál de los siguientes números es racional?

A. $\sqrt{35}$

B. $\sqrt{36}$

C. $\sqrt{37}$

D. $\sqrt{38}$

**2.** ¿Cuál alternativa es falsa?

A. $3{,}33\overline{45} \in \mathbb{Q}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3} \notin \mathbb{Q}$

C. $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$

D. $\sqrt{3{,}6} \notin \mathbb{R}$

**3.** Si $p = 1{,}5$ y $q = \frac{9}{4}$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) número(s) irracional(es)?

I. $\sqrt{-pq}$

II. $\sqrt{p^2q}$

III. $\sqrt{pq^2}$

A. Solo I.

B. Solo III.

C. Solo I y II.

D. Solo I y III.

**4.** Si $a = 1{,}\overline{6}$, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a un número irracional?

A. $a^2 - a$

B. $\sqrt{1 + \frac{a}{3}}$

C. $\sqrt{a^2 - 1}$

D. $\sqrt{3a - 1}$

**5.** ¿Por qué número hay que multiplicar $\sqrt{3}$ para obtener 3?

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{9}$

C. 3

D. $3\sqrt{3}$

**6.** ¿Cuál es el área de un círculo de radio $3\sqrt{3}$cm? Considera $\pi = 3$.

A. $9 \text{ cm}^2$

B. $3^4 \text{ cm}^2$

C. $\sqrt{54} \text{ cm}^2$

D. $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

**7.** ¿Qué expresión resulta al reducir $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \frac{\sqrt{8}}{2}$?

A. 8

B. $8\sqrt{2}$

C. $10\sqrt{2}$

D. $9 - \sqrt{4}$

**8.** ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\sqrt{72} + \sqrt{48}$?

A. $10\sqrt{6}$

B. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{8} + 8\sqrt{6}$

D. $36\sqrt{2} + 16\sqrt{3}$

**9.** ¿En qué caso se muestran números ordenados de menor a mayor?

A. $2\sqrt{3}, \sqrt{13}, 3\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$.

C. $3\sqrt{2}, \sqrt{13}, 2\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \sqrt{13}$.

**10.** $\sqrt{18} + 2\sqrt{12} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{75} =$

A. $11\sqrt{6}$

B. $4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

C. $7\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

**11.** Si a = 9 y b = 18, ¿cuál es el valor de $(a + 2\sqrt{b})(a - 2\sqrt{b})$?

**A.** $-9$

**B.** 9

**C.** 27

**D.** $-27$

**12.** ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$?

**A.** $-46$

**B.** $14 + 4\sqrt{6}$

**C.** $14 - 4\sqrt{6}$

**D.** $14 - 2\sqrt{6}$

**13.** $5\sqrt{75} + 9\sqrt{147} - 6\sqrt{192} =$

**A.** $8\sqrt{30}$

**B.** $136\sqrt{3}$

**C.** $40\sqrt{3}$

**D.** 40

**14.** $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) =$

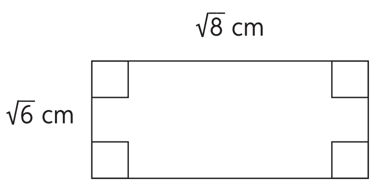
**A.** $-2$

**B.** 2

**C.** $4 + 2\sqrt{3}$

**D.** $4 - 2\sqrt{3}$

**15.** ¿Cuál es el área del rectángulo?




**A.** 48 $cm^2$

**B.** $3\sqrt{4}$ $cm^2$

**C.** $4\sqrt{3}$ $cm^2$

**D.** $8\sqrt{6}$ $cm^2$

**16.** ¿Cuál de estas es la mejor aproximación de $\sqrt{15}$?

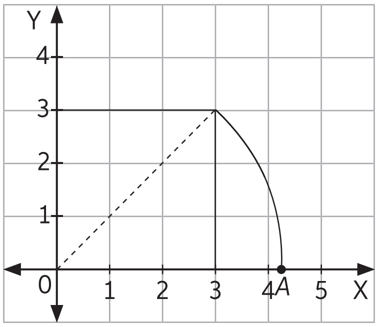
**A.** 3,62

**B.** 3,85

**C.** 3,87

**D.** 3,91

**17.** Se traza un arco de circunferencia con centro en (0, 0), como se muestra a continuación:




¿Cuál es la coordenada X del punto *A*?

**A.** $2\sqrt{3}$

**B.** $3\sqrt{2}$

**C.** $4\sqrt{2}$

**D.** $4\sqrt{3}$

**18.** Si $\sqrt{3}$ es aproximadamente 1,73, entonces $\sqrt{0{,}12}$ aproximado por redondeo a la centésima es:

**A.** 0,02

**B.** 0,22

**C.** 0,35

**D.** 0,36

**19.** María José quiere instalar una cerca perimetral en un terreno cuadrado cuya área es de 7,2 $km^2$. ¿Cuántos metros de cerca necesita?

**A.** $120\sqrt{8}$ m

**B.** $1200\sqrt{8}$ m

**C.** $4800\sqrt{5}$ m

**D.** $6000\sqrt{2}$ m

# Potencias y raíces enésimas

## Raíz enésima

**1.** Calcula las siguientes raíces enésimas utilizando la definición:

a. $\sqrt{81}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{0,000064}}$

i. $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{27}$

b. $\sqrt[4]{16^2}$

f. $\sqrt[4]{0,0016}$

j. $\sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[4]{81}$

c. $\sqrt[3]{\sqrt{81}}$

g. $\sqrt[3]{\frac{-24}{125}}$

k. $\sqrt{0,81} \cdot \sqrt[10]{1024}$

d. $\sqrt[3]{320}$

h. $\sqrt[4]{2401}$

l. $\sqrt[10]{1024} \cdot \sqrt[5]{243}$

**2.** Simplifica las siguientes raíces e identifica las propiedades utilizadas:

a. $\sqrt[4]{80}$

d. $\sqrt[5]{960}$

g. $\sqrt[4]{9604}$

b. $\sqrt[3]{\frac{24}{125}}$

e. $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[4]{80}}$

h. $\frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[6]{192}}$

c. $\sqrt[4]{\frac{768}{243}}$

f. $\sqrt[3]{\frac{108}{128}}$

i. $\sqrt[4]{\frac{81}{10000}}$

3. ◆ En cada caso, determina si la raíz dada se puede calcular o no en los números reales. En caso de que sea posible, indica si es un número racional o irracional.

a. $\sqrt[4]{-16}$

d. $\sqrt[8]{256}$

b. $\sqrt[5]{-1000}$

e. $\sqrt[3]{-0,125}$

c. $\sqrt[3]{-27}$

f. $\sqrt[4]{-0,00001}$

4. ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ La raíz cúbica de $-1000$ es 10.

b. ______ Si $(-8)^2 = 64$, entonces $\sqrt{64} = -8$.

c. ______ La raíz sexta de $-64$ es $-2$.

d. ______ Si $(-2)^3 = -8$, entonces la raíz cúbica de 8 es $-2$.

e. ______ La raíz quinta de 3125 es 5.

f. ______ Si $4^3 = 64$, entonces $\sqrt[4]{64} = 3$.

g. ______ La raíz cúbica de $-125$ es $-5$.

# Raíces enésimas y potencias de exponente racional

**1.** Expresa como potencias de exponente racional de la forma $a^{\frac{m}{n}}$ las raíces:

a. $\sqrt{3}$

e. $\sqrt[3]{0,125}$

i. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{45}}$

b. $\sqrt[4]{16^2}$

f. $\sqrt[4]{\sqrt{0,\overline{1}}}$

j. $\sqrt[6]{32^3}$

c. $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$

g. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

k. $\sqrt[10]{2^{50}}$

d. $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$

h. $\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

l. $\sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[3]{27^{\frac{1}{3}}}$

**2.** Expresa cada potencia de exponente racional en raíces de la forma $\sqrt[n]{a^m}$.

a. $5^{\frac{1}{2}}$

d. $4 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$

g. $24^{\frac{1}{16}}$

b. $14^{-\frac{3}{2}}$

e. $-27^{-\frac{1}{3}}$

h. $0,16^{-\frac{1}{4}}$

c. $\left((0,\overline{2})^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$

f. $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

i. $\left((81)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{4}}$

**Para revisar**
gbit.cl/C21M2MP014A

**3.** ◆ Expresa como potencia y reduce el índice de las siguientes raíces enésimas.

**a.** $\sqrt[3]{64}$

**b.** $\sqrt[5]{\dfrac{1024}{32}}$

**c.** $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[4]{64}}$

**d.** $-\sqrt[3]{1080}$

**e.** $\sqrt[4]{1296}$

**f.** $\sqrt[3]{-514}$

**g.** $\dfrac{\sqrt[3]{-320}}{3}$

**h.** $\sqrt[4]{\dfrac{243}{16}}$

**4.** ◆ ¿Cuál de las siguientes representaciones son incorrectas? En caso de ser errónea, corrige el error.

**a.** $8^{\frac{1}{2}} \leftrightarrow \sqrt[3]{2}$ Correcta ______ Incorrecta ______

**b.** $\sqrt[4]{49} \leftrightarrow 7^{-2}$ Correcta ______ Incorrecta ______

**c.** $\sqrt{\dfrac{5}{125}} \leftrightarrow 5^{\frac{-1}{2}}$ Correcta ______ Incorrecta ______

**d.** $\sqrt[10]{(-2)^2} \leftrightarrow -\sqrt[5]{2}$ Correcta ______ Incorrecta ______

# Racionalización

**1.** Escribe una expresión equivalente sin raíces en el denominador:

a. $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}}$

b. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

c. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

d. $\sqrt{\left(\dfrac{4}{6}\right)}$

e. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{9}}$

f. $\dfrac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt{2}}$

g. $\sqrt[3]{\dfrac{125}{24}}$

h. $\dfrac{\sqrt[4]{2401}}{2\sqrt[2]{27}}$

i. $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{54}}$

j. $\sqrt[5]{-96} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{81}{2}}$

k. $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{3-1}}$

l. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{972}}$

m. $\dfrac{\sqrt{9}}{2-\sqrt{3}}$

n. $\dfrac{23}{\sqrt{5}-3}$

o. $\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

p. $\dfrac{4}{\sqrt{5}+6}$

q. $\dfrac{\sqrt{125}}{2\sqrt{3}-1}$

r. $\dfrac{\sqrt{49}+\sqrt{9}}{\sqrt{3}-1}$

**Para practicar**
gbit.cl/C21M2MP016A

**2.** ◆ Completa la tabla.

| Expresión | a | b | c | Racionalización |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}$ | 1 | 4 | – | |
| $a - \dfrac{c}{\sqrt{b}}$ | 3 | 2 | 5 | |
| $\dfrac{c}{\sqrt{a} - c}$ | 2 | 6 | 7 | |
| $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot a}{\frac{1}{4\sqrt{a}} c}$ | 3 | 5 | 9 | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{a} - 2} + \dfrac{3}{\sqrt{b} - 1} - \dfrac{2}{\sqrt{c} + 1}$ | 2 | 3 | 4 | |
| $\dfrac{a}{\sqrt{c}} - \dfrac{b}{\sqrt{a} + 1}$ | 1 | 2 | 3 | |
| $\dfrac{a}{1 - \sqrt{4c}} + \dfrac{b}{2 - \sqrt{c}}$ | 3 | 5 | 7 | |

**3.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ Para racionalizar una expresión, es necesario sumar el inverso aditivo de la raíz al denominador de dicha expresión.

______________________________________________

**b.** ______ El resultado de la racionalización es una expresión no equivalente.

______________________________________________

**c.** ______ Para racionalizar la expresión $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, es necesario multiplicar la expresión por la unidad $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

______________________________________________

**d.** ______ La expresión $\dfrac{5 + \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}}$ racionalizará la expresión $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$.

______________________________________________

**e.** ______ Para racionalizar la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{b}}$, el valor de b debe ser siempre negativo.

______________________________________________

**f.** ______ No se puede racionalizar la expresión $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{7 - \sqrt{2}}\right)^2$.

______________________________________________

## Antes de continuar

Lee atentamente y selecciona la alternativa correcta.

**1.** La expresión $\left(\sqrt[3]{64}\right)^2$ equivale a:

A. 6

B. 12

C. 16

D. 32

**2.** La expresión $\frac{\sqrt{81}}{3}$ es equivalente a:

A. 1

B. 3

C. 9

D. 12

**3.** ¿Cuál es el resultado de la operación $\sqrt{16} : 4^{-1}$?

A. 4

B. 8

C. 16

D. 24

**4.** ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\sqrt{1024} - \sqrt[4]{16}$$

A. 0

B. 2

C. 16

D. 30

**5.** ¿Cuál es el valor de $a$ si $\sqrt[a]{125} = 5$?

A. 5

B. 3

C. −8

D. 10

**6.** Al reducir la fracción $\frac{\sqrt[3]{189}}{2}$ resulta:

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

C. $\frac{3\sqrt[3]{7}}{2}$

D. No se puede determinar.

**7.** Si $3^{\frac{1}{2}} = a$, entonces:

I. $a^2 = -3$

II. $\sqrt{a} = 3^4$

III. $a - \sqrt{2} = 1$

A. Sólo I

B. Sólo III

C. I y II

D. Ninguna de las anteriores.

**8.** La expresión $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-\frac{1}{4}}$ es igual a:

A. $-\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{2^{12}}$

C. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

D. $\sqrt[12]{2}$

**9.** ¿Cuál(es) de las siguientes condiciones debe(n) cumplirse para que la expresión $(-m)^{\frac{2}{5}}$ para que sea válida en $\mathbb{R}$?

I. $m > 0$

II. $m \leq 0$

III. $m \in \mathbb{R}$ para cualquier valor.

A. Solo I.

B. Solo II.

C. Solo III.

D. Solo I y II.

**10.** La expresión $\sqrt[6]{3^{30}}$ es equivalente a:

A. 15

B. $3^{\frac{1}{5}}$

C. $81 \cdot 3$

D. $3^6$

**11.** ¿Cuál es el valor de $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$?

A. $\sqrt[8]{3}$

B. $3^{\frac{1}{6}}$

C. $3^{\frac{3}{2}}$

D. $3^6$

**12.** ¿Qué valor debe tener $a$ para satisfacer la siguiente igualdad?

$$\sqrt[3]{216} = 3a^2$$

A. $-\sqrt{2}$

B. 2

C. $-3$

D. 6

**13.** La expresión $\sqrt{m^3} - \sqrt[3]{mn^2}$ es equivalente a:

A. $\sqrt{m^3 - m^3n^2}$

B. $m\left(m^{\frac{1}{2}} - (m^{-2}n^2)^{\frac{1}{3}}\right)$

C. $m\left(m^{-2} - \dfrac{m}{n^3}\right)$

D. $\sqrt[3]{m^{\frac{5}{2}} - nm^2}$

**14.** Al reducir la expresión $5\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[12]{8} - \sqrt[4]{512}$, se obtiene:

A. $4\sqrt[4]{2}$

B. $8\sqrt[4]{2}$

C. $12\sqrt[4]{2}$

D. No se puede reducir.

**15.** ¿Qué expresión se obtiene al racionalizar $\dfrac{2}{\sqrt{5} - 1}$?

A. $\dfrac{2\sqrt{5} + 1}{4}$

B. $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

D. $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

**16.** Al racionalizar $a - \dfrac{b}{\sqrt[a]{b} - 1}$, siempre que $a = 2$ y $b = 3$, tenemos:

A. $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{3}$

C. $\dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$

D. $\dfrac{3\sqrt{5} - 1}{2}$

**17.** La expresión $\dfrac{1 - a}{\sqrt{b} - 1}$ es racionalizada por:

A. $\dfrac{-\sqrt{b} - 1}{\sqrt{b} - 1}$

B. $\dfrac{\sqrt{b} + 1}{\sqrt{b} + 1}$

C. $-\dfrac{\sqrt{b} - 1}{\sqrt{b} + 1}$

D. $\dfrac{-\sqrt{b} - 1}{-\sqrt{b} - 1}$

**18.** Al racionalizar la expresión $\dfrac{12}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$, se obtiene:

A. $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$

Lección 3

# Logaritmos

## Definición de logaritmos

**1.** Expresa las siguientes potencias o raíces como logaritmos. Luego, comprueba.

a. $2^{-1} = \frac{1}{2}$

b. $100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$

c. $\sqrt{25} = 5$

d. $121^{\frac{1}{2}} = 11$

e. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = 512$

f. $\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \frac{27}{64}$

g. $\left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{343}{8}$

h. $0,1^{-2} = 100$

i. $\sqrt[3]{2^{12}} = 16$

j. $\left(\frac{100}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{11}{10}$

k. $\left(\frac{3}{12}\right)^{\frac{12}{3}} = \frac{1}{256}$

l. $0,0049^{-\frac{1}{2}} = 0,07$

**2.** Expresa los siguientes logaritmos como potencia. Luego, comprueba.

a. $\log_2 2 = 1$

b. $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

c. $\log 1000 = 3$

d. $\log\left(\frac{1}{10^3}\right) = -3$

e. $\log_3 9 = 2$

f. $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

g. $\log_{2,2} 1 = 0$

h. $\log_{81}\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{2}$

i. $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

j. $\log 0,001 = -3$

k. $\log_3 3^2 = 2$

l. $\log_{0,01} 100 = -1$

3. Evalúa las siguientes equivalencias. Corrige si encuentras algún error.

a. $10^b = a \leftrightarrow \log_a 10 = b$

b. $5^4 = a \leftrightarrow \log_5 4 = a$

c. $(0,1)^{-2} = 100 \leftrightarrow \log 100 = -2$

d. $\text{Log}_{0,5} 0,25 = 2 \leftrightarrow 2^{0,5} = 0,25$

4. Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ Escribir log $a$ es equivalente a escribir $\log_{10} a$.

b. ______ $\log_1 a = 0$, para cualquier número real $a$.

c. ______ Escribir log a es equivalente a escribir $\log_a 10$.

d. ______ La expresión $\log(-10)$ no existe.

e. ______ La expresión $\log_b a$ existe siempre que $a$ y $b$ sean reales positivos.

5. Calcula el valor de $a$ en cada caso.

a. $\log_3 9 = a$

b. $\log_9 3 = a$

c. $\log_2 a = 4$

d. $\log_3 a = -2$

# Propiedades de los logaritmos

**1.** Calcula las siguientes expresiones usando propiedades de logaritmos.

**a.** $\log_{2021} 2021$

**b.** $\log_{2021} 1$

**c.** $\log 1 + \log_7 1 + \log_2 1$

**d.** $\log_2 1 + \log_2 2 + \log_3 1$

**e.** $3 \log_5 5 - \left(\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} + 1\right)$

**f.** $\log_{0,02} 1 + \log_{0,02} \frac{1}{50}$

**g.** $\log_{0,\overline{3}} \frac{1}{3} - \log_{\sqrt{6}}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$

**h.** $\log_{\sqrt{18}}(3\sqrt{2})$

**i.** $\log_{\sqrt{2}}(5\sqrt{2})$

**j.** $\log_{2,5} \frac{5}{2} + \log_{\frac{2}{5}} 0,4$

**k.** $\log_{1+\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})$

**l.** $\log(\sqrt{18} - 3\sqrt{2} + 1)$

**2.** ◆ Analiza y determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ $\log_a a = 1$ para cualquier número real.

**b.** ______ $\log_a 0 = 1$ para cualquier número real positivo $a$.

**c.** ______ $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ para cualquier número real positivo $a$.

**d.** ______ $\log_a b = -1$ siempre que $a$ y $b$ sean inversos multiplicativos y positivos.

**e.** ______ $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$ para $a$, $x$ e $y$ reales positivos y $a \neq 1$.

**3.** ◆ Reduce cada expresión usando propiedades.

a. $\log_2(2 \cdot 8)$

b. $\log_2 2^5(3^0 + 5^0)$

c. $\log_3(81 \cdot 27)$

d. $\log_5(5^{10} \cdot 125)$

e. $\log_2(64 \cdot 16 \cdot 4)$

f. $\log_5\left(5 \cdot \frac{1}{125}\right)$

g. $\log_7\sqrt{7}$

h. $\log_3\sqrt{27}$

i. $\log_{0,5}\left(\frac{1}{2} \cdot 2^3\right)$

j. $\log_{\frac{1}{3}}\left(3\sqrt[3]{3}\right)$

k. $\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3^{-1}\right)$

l. $\log\left(\frac{1}{10} \cdot 10^{\frac{2}{3}}\right)$

m. $\log\left(\frac{10^3 \cdot 10^{-1}}{10^2}\right)^2$

**Para practicar**
gbit.cl/C21M2MP023A

**4.** ◆ Expresa en un solo logaritmo. Considera que $A = \log 2$, $B = \log 3$ y $C = \log 6$.

a. $A + B - C$

b. $2B - C$

c. $2A - B + C$

**5.** ◆ Si $P = \log 2$, $Q = \log 5$ y $R = \log 7$, expresa los siguientes logaritmos en términos de $P$, $Q$ y $R$.

a. $\log\left(\frac{14}{5}\right)$

b. $\log_3\left(\frac{20}{7}\right)$

c. $\log_2 25$

d. $\log(2450)$

e. $\log_7(8 \cdot 5^{-1})$

f. $\log_{15} 8$

**6.** ◆ Comprueba las siguientes identidades para $a = 10$ y $a = 1$.

a. $10^{\log a} = a$.

b. $\log(a^{\log a}) = (\log a)^2$

c. $\log_a \frac{1}{b} = -\frac{\log_c b}{\log_c a}$

**7.** ◆ Escribe dos expresiones logarítmicas, de base distinta a 9, equivalentes al número 9. Utiliza las propiedades.

# Aplicaciones de logaritmos

**1.** ◆ La relación entre el área de la superficie corporal $a$ de una persona en $m^2$, su masa $m$ en kg y su altura $h$ en cm está dada por la expresión:

$$\log a = -2,144 + 0,425 \log m + 0,725 \log h$$

**a.** Calcula la superficie corporal aproximada en cada uno de los siguientes casos:

- $m = 80$ kg y $h = 1,65$ m
- $m = 72$ kg y $h = 1,81$ m
- $m = 60$ kg y $h = 1,70$ m
- $m = 55$ kg y $h = 1,62$ m

**b.** La mujer viva más pequeña del mundo mide 62,8 cm y su masa es de 5 kg. ¿Cuál es el área aproximada de su superficie corporal?

**c.** El hombre más alto mide 2,51 m y su masa es de 220 kg. ¿Cuál es el área aproximada de su superficie corporal?

**2.** ◆ El pH depende de la concentración de moles de hidrógeno $[H^+]$ presentes en una sustancia dada por la fórmula $pH = -\log[H^+]$.

- En cada sustancia calcula el pH o los moles de hidrógeno $H^+$ según corresponda.
- Identifica si la sustancia es ácido (A) o base (B). Ten presente que las sustancias con un pH inferior a 7 se consideran ácidos. Las que tienen un pH mayor que 7 se consideran base o alcalinos.

**a.** Limonada: ______
$pH = 2,3$

**b.** Bebida cola: ______
$pH = 2,5$

**c.** Leche magnesia: ______
$H^+ = 10^{-10}$

**d.** Carne vacuna ______
$H^+ = 10^{-6}$

**e.** Coliflor ______
$H^+ = 10^{-5,6}$

**f.** Choclo ______
$H^+$ entre $10^{-7,5}$ y $10^{-6}$

**g.** Pepino ______
pH entre 5,1 y 5,6

**h.** Fideos ______
$H^+$ entre $10^{-3,5}$ y $10^{-4,7}$

**i.** Arroz ______
$H^+$ entre $10^{-6}$ y $10^{-6,7}$

**3.** ◆ Responde a partir de la información anterior.

**a.** Las concentraciones de moles de hidrógeno varían entre 1 y $10^{-14}$, ¿Entre qué valores varía el pH?

**b.** Si 7 es un pH neutro, ¿cuál es su concentración de moles $H^+$?

**c.** Reescribe la fórmula de manera que en la expresión de la derecha no aparezca el signo menos.

**d.** Reescribe la fórmula en términos de un logaritmo de base $H^+$.

**4.** ◆ La población de un territorio se modela mediante la relación $P = P_0 \cdot r^t$. En ella, $P$ es la población, $t$ periodos de tiempo, $P_0$ la población inicial y $r$ el cambio porcentual entre cada periodo. En cierta ciudad el crecimiento $r$ entre cada año de su población es del 25 %. Si la población inicial $P_0$ son 100 000 habitantes. ¿Cuánto tiempo aproximado debe transcurrir para que haya 133 100 habitantes?

5. ◆ La intensidad sonora $\beta$ medida en decibeles (dB) depende de la intensidad acústica $I$ medida en watts sobre metro cuadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$. Estas se relacionan mediante la expresión $\beta = 10 \cdot \log I + 120$. Calcula la intensidad acústica o la intensidad sonora según corresponda.

a. Concierto: entre $10^{-2}$ y $1 \frac{W}{m^2}$.

c. Grito humano: hasta 75 dB.

e. Bocina: entre $10^{-2,5}$ y $10^{-2} \frac{W}{m^2}$.

b. Herramientas de construcción: entre $10^{-3}$ y $10^{-1} \frac{W}{m^2}$.

d. Biblioteca: alrededor de $10^{-10} \frac{W}{m^2}$.

f. Cachalote: alrededor de 230 dB.

6. ◆ Utilizando propiedades de logaritmo reescribe la intensidad sonora $\beta$ de cada actividad anterior como un solo logaritmo. Sigue el ejemplo:

$$\begin{aligned} 10 \log A + 120 &= \log A^{10} + 120 \log 10 \\ &= \log A^{10} + \log 10^{120} \\ &= \log(A^{10} \cdot 10^{120}) \end{aligned}$$

a.

c.

e.

b.

d.

f.

## Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

1. $\log_3 \sqrt{3}$ es igual a:

   A. $\frac{1}{4}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 1

   D. 3

2. Si $2^{-4} = \frac{1}{16}$, entonces:

   A. $\log_2 - 4 = \frac{1}{16}$

   B. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

   C. $\log_{\frac{1}{16}} 2 = -4$

   D. $\log_{-4} \frac{1}{16} = 2$

3. Respecto de la expresión $\log_a b = c$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   A. Si $b = 1$, entonces $c = 0$.

   B. $a$ debe ser un real positivo y distinto de 1.

   C. $c$ siempre es un real positivo.

   D. Si $a = b$, entonces $c = 1$.

4. ¿Cuál de las siguientes equivalencias es o son verdaderas?

   I. $3^2 = 9 \leftrightarrow \log_3 9 = 2$

   II. $2^{-3} = \frac{1}{8} \leftrightarrow \log_{\frac{1}{8}} 2 = -3$

   III. $4^1 = 4 \leftrightarrow \log 4 = 1$

   A. Solo I.

   B. Solo II.

   C. Solo III.

   D. Solo I y II.

5. Según la expresión $5^3 = 125$, se tiene que:

   A. El logaritmo en base 3 de 5 es 125.

   B. El logaritmo en base 5 de 3 es 125.

   C. El logaritmo en base 5 de 125 es 3.

   D. El logaritmo en base 3 de 125 es 5.

6. $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ es igual a:

   A. 10

   B. 2

   C. −2

   D. −10

7. Si $\log A = 3$, entonces $\log A^{-1}$ es:

   A. −3

   B. $-\frac{1}{3}$

   C. $\frac{1}{3}$

   D. 3

8. Si $\log A = B$ y $\log C = D$, con $D$ distinto de 0, entonces $\log_C A$ es:

   A. $\frac{B}{D}$

   B. $\frac{D}{B}$

   C. $BD$

   D. $D - B$

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   I. $\log A$ es equivalente a $\log_{10} A$.

   II. $\log 10 = 1$.

   III. $\log_{25} A$ es equivalente a $2 \log_5 A$.

   A. Solo I.

   B. Solo III.

   C. Solo I y II.

   D. I, II y III.

10. $\log_{(2+\sqrt{3})}(2 + \sqrt{3})$ es igual a:

    A. $2 + \sqrt{3}$

    B. 1

    C. 2

    D. $\sqrt{3}$

**11.** $\log 3 + \log 6 - 2\log 4$ es igual a:

A. $\log\frac{18}{16}$

B. $\log\frac{16}{18}$

C. $\log\frac{9}{16}$

D. $\log\frac{9}{8}$

**12.** Si $\log_a \sqrt{3} = 4$, entonces el valor de a es:

A. $3^2$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt[4]{3}$

D. $\sqrt[8]{3}$

**13.** Si $\log A + \log B - \log C = 3$, entonces $10^3$ es igual a:

A. $AB - C$

B. $\frac{A+B}{C}$

C. $\frac{AB}{C}$

D. No se puede determinar.

**14.** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I. $\log 1 = 0$

II. $\log_2 1 = 0$

III. $\log_a 0 = 1$

A. Solo I.

B. Solo III.

C. Solo I y II.

D. I, II y III.

**15.** $\log_{\frac{1}{3}}\left(0,\overline{3}\right)^2$ es igual a:

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

**16.** $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{75} - 4\sqrt{3})$ es igual a:

A. 2

B. 1

C. 0

D. $\sqrt{3}$

**17.** Si $\log_3 a = 3^3$, entonces el valor de a es:

A. 3

B. $3^3$

C. $3^{\frac{1}{3}}$

D. $3^{3^3}$

**18.** Si $a > 0$ distinto de 1 y $x$ e $y$ son reales positivos, ¿cuáles de las siguientes propiedades son verdaderas?

I. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

II. $\log_a(x - y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

III. $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a x$

A. Solo I.

B. Solo III.

C. Solo I y II.

D. Solo I y III.

**19.** Si $\log A = -2$ y $\log B = 3$, entonces $\log_A B$ es igual a:

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

**20.** La expresión $\frac{2\log_5 1{,}75 + \log_5 16}{1 - \log_5 2{,}5}$ es igual a:

A. $\log_5 49$

B. $\log_2 49$

C. $\log_5 47$

D. $\log_2 37$

Lección 4

# Cambio porcentual constante

## Definición de cambio porcentual

1. ◆ El índice de variación ($I_v$) del dólar entre enero y febrero en un año fue de 1,07 aproximadamente.

a. ¿Aumentó o disminuyó el valor del dólar? ¿En qué porcentaje lo hizo?

b. En febrero el dólar estaba a \$880 pesos chilenos. ¿Cuál era su valor en enero?

c. Un tercer experto dice que el $I_v$ se mantendrá en marzo. ¿Cuál sería el valor del dólar en pesos chilenos?

d. Un experto estima que el $I_v$ disminuirá en 0,04 en marzo. ¿Cuál será el valor del dólar en pesos chilenos?

e. Otro experto estima que el $I_v$ aumentará en 0,02 en marzo. ¿Cuál sería el valor del dólar en pesos chilenos en ese caso?

f. ¿En cuánto debería aumentar o disminuir el $I_v$ para que el dólar en marzo cueste \$750?

2. ◆ Determina el índice de variación escribiéndolo de forma recursiva:

a. Si haces ejercicio, la grasa en tu cuerpo disminuirá en 3 % cada mes.

b. Si te esfuerzas el 30 % cada día, lograrás lo que te propones en la semana.

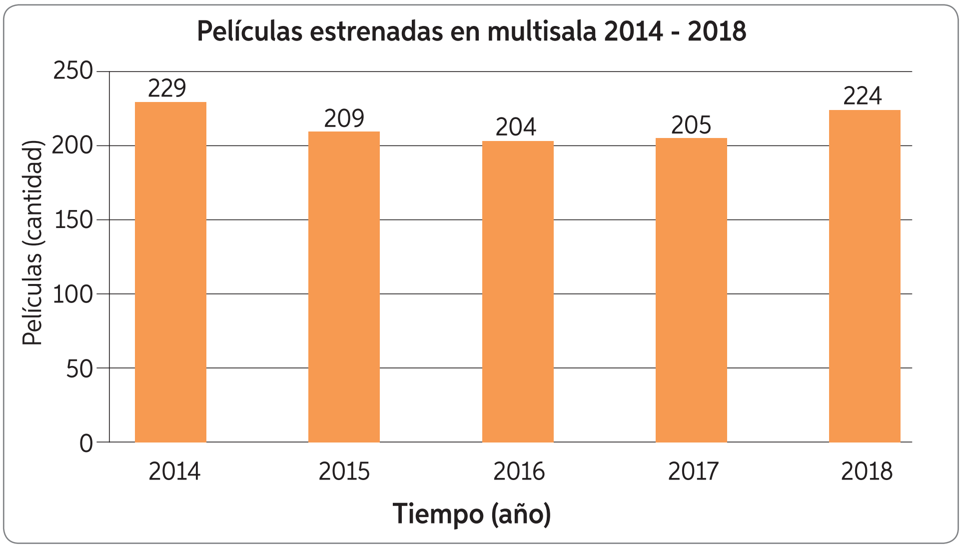
c. El smog aumenta en 0,01 % con cada auto que circula a la semana.

d. Si corres día por medio, aumentarás tu velocidad en 3 %.

e. La venta de libros disminuyó en 16 % durante el segundo semestre.

f. Las ventas plataformas de juegos en línea aumentó en 20 % en 2020.

3. ◆ El siguiente gráfico muestra la cantidad de películas estrenadas en cierta multisala de cine en Chile entre 2014 y 2018. Calcula el índice de variación entre los años que se indican a continuación.




a. 2014 y 2015

c. 2016 y 2017

e. 2015 y 2017

b. 2015 y 2016

d. 2017 y 2018

f. 2016 y 2018

g. El índice de variación entre dos años es cercano a uno. ¿Qué quiere decir esto?

h. Si el índice de variación se mantiene en 2019, ¿la cantidad de películas será la misma que en 2018? ¿Por qué?

i. Estima la cantidad de películas que viste el año pasado. ¿Cuál es el índice de variación comparándolas con las que has visto este año?

**4.** ◆ Analiza la siguiente tabla. En ella, se muestra la cantidad de bibliotecas públicas del Servicio Nacional del Patrimonio Cultural con acceso gratuito a Internet entre 2014 y 2018.

| Tiempo (año) | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bibliotecas públicas con internet gratis (cantidad) | 457 | 435 | 406 | 409 | 382 |

¿Cuál es el índice de variación entre los siguientes años?

**a.** 2014 y 2015

**b.** 2015 y 2016

**c.** 2016 y 2017

**d.** 2017 y 2018

**e.** 2014 y 2018

**f.** 2015 y 2017

**g.** ¿Entre qué años el índice de variación es menor que 1? ¿Qué significa esto?

**h.** Con el pasar de los años, el acceso a la tecnología e Internet es cada vez mayor. Sin embargo, esto no se refleja en los datos de la tabla. En parejas, reflexionen sobre esta situación y justifiquen a qué se debe esto.

**5.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ El índice de variación entre dos datos es 1,5. Esto significa que entre un periodo y otro la cantidad aumentó en la mitad.

**b.** ______ Al escribir de forma recursiva la expresión "La población ($b$) de una bacteria aumenta un 0,3 % cada minuto", obtenemos: $b(t + 1) = 1{,}003$.

**c.** ______ Podemos representar algebraicamente un fenómeno que involucre un cambio porcentual constante mediante la ecuación recursiva: $f(t + 1) = I_v \cdot f(t)$.

**d.** ______ El índice de variación ($I_v$) indica el decrecimiento de una variable.

**6.** ◆ Analiza las siguientes situaciones y responde:

Una consola de juegos tiene un valor de \$230 000 y se devalúa cada mes en 0,5 %.

**a.** ¿Qué significa que un objeto se devalúa?

**b.** ¿Cuál será el valor de la consola en 2 años?

**c.** ¿Es positivo o negativo el índice de variación? ¿Por qué?

**d.** Si la condición se mantiene, ¿en cuánto tiempo la consola no tendrá valor?

El valor de una pintura Monet posee un índice de variación de 1,2 aproximadamente cada trimestre.

**e.** ¿Qué significa que su índice de variación sea 1,2?

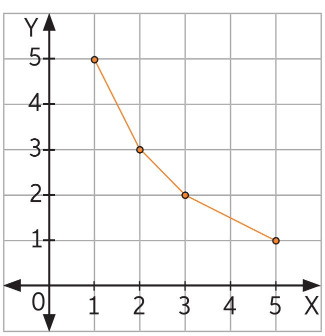
**f.** Si la pintura vale 100 USD a la fecha, ¿cuál será su valor en cuatro trimestres?

**g.** ¿Cuál será el valor de la pintura en tres años?

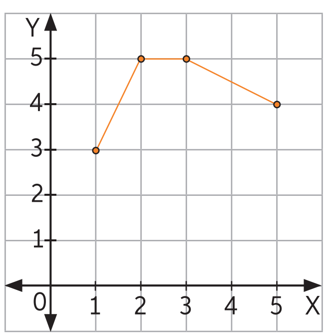
**h.** ¿En qué porcentaje aumenta su valor la pintura cada trimestre?

**7.** ◆ Los siguientes gráficos representan diferentes fenómenos a lo largo de los años. Indica sus índices de variación.

**a.**




**b.**



# Aplicaciones del cambio porcentual

**1.** Representa cada situación en una expresión recursiva de cambio porcentual.

**a.** En una comunidad social a principios de 1990 se reciclaba solo el 1 % de los residuos. Desde entonces, su compromiso con el reciclaje ha aumentado en 3 % anual.

**b.** Raúl empezó a perder su cabello en 6 % desde 2001. Al principio tenía alrededor de 90 000.

**c.** Un corredor principiante consigue correr 5 minutos. De ese modo, aumenta semanalmente su resistencia en 4 %.

**d.** La velocidad de reacción de un jugador novato de PC es de 4 segundos. Con la práctica constante aumenta su velocidad en 0,1 % a la semana.

**e.** El índice de variación diaria de una bacteria es de 2,3 e inicialmente había 3 contagiados.

**f.** Javiera tiene 80 % de grasitud en su rostro. El uso de una crema cosmética disminuye la grasitud del rostro en 2 % semanal.

**2.** ◆ Observa las siguientes expresiones. ¿Cuáles representan una expresión recursiva de un cambio porcentual? Justifica tu respuesta.

**a.** $f(t) = f(0) \cdot t^2$

**b.** $a(t) = 2^t \cdot 1200$

**c.** $s(t) = 2(1 - t^2)$

**d.** $l(t) = (1 - 0{,}2)^t$

**e.** $r(t) = 2^t - 3^2$

**f.** $g(t) = f(0) - t^2$

**g.** $j(t) = 2^{t-1} \cdot 4$

**h.** $m(t) = 3^t \cdot m(0)$

**i.** $e(t) = e(1) - 2^t$

3. ◆ Carlos tiene unas zapatillas deportivas desde julio de 2020. Como practica mucho deporte, el desgaste semanal de estas es de 1%. El modelo que representa el desgaste de las zapatillas es $d(t) = A(1 - r)^t$.

a. ¿Cuál es el valor de *r*? ¿Qué representa?

b. ¿Cuál es el valor de A? ¿Qué representa?

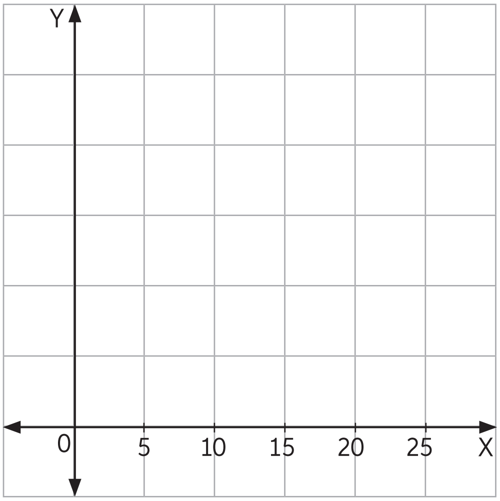
Las zapatillas deben usarse para hacer deportes con un 60 % de desgaste total como máximo.

c. ¿Cuál es el desgaste total de las zapatillas después de tres meses de entrenamiento?

d. ¿En cuánto tiempo Carlos debe comprar zapatillas nuevas?

e. Completa la siguiente tabla y grafica:

| Semana (n°) | Desgaste (*d*(*t*)) |
|---|---|
| 0 | |
| 5 | |
| 10 | |
| 15 | |
| 20 | |
| 25 | |




Carlos se compra dos pares zapatillas para entrenar. Unas se desgastan al 3 % y las otras al 2 %.

f. ¿Qué expresiones representan sus modelos recursivos de sus cambios porcentuales? Justifica tu respuesta.

g. ¿Cuánto tiempo demorará cada zapatilla en quedar totalmente desgastada?

h. ¿Qué es más conveniente: las zapatillas con desgaste del 1 % o las nuevas?

**4.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ A partir de la expresión recursiva del cambio porcentual, siempre se puede determinar el valor inicial luego de *t* periodos de tiempo transcurridos.

______________________________

**b.** ______ Cuando se habla de desgaste de una sustancia o elemento, su índice de variación siempre es negativo.

______________________________

**c.** ______ Cuando se habla del aumento de una sustancia o elemento, su índice de variación siempre es positivo.

______________________________

**d.** ______ La expresión $c(t) = (1 - 0{,}04)^t$ indica que el cambio porcentual disminuye en 40 % en función del tiempo transcurrido.

______________________________

**5.** ◆ El porcentaje de motivación para trabajar de una persona disminuye en 5 % cada media hora.

**a.** ¿Qué expresión modela el porcentaje de motivación de una persona durante el día?

______________________________

**b.** Natalia consiguió un 80 % de motivación para trabajar hoy y empezó a las 8:30 horas. ¿Cuál será su porcentaje de motivación después de trabajar 6 horas?

**c.** Patricio diseñó una forma de trabajar para no desmotivarse. Esta consiste en tomar descansos de 5 minutos cada hora. De esta forma, su motivación aumenta en 3 %. Hoy entró a trabajar a las 9:00 horas y lleva 5 horas y 25 minutos trabajando. ¿Cómo van sus porcentajes de motivación si hoy amaneció 85 % motivado?

6. La expresión que modela los intereses que obtiene Laura cada 3 meses en el banco está dada por: $I(t) = 1\,000\,000(1,002)^t$.

a. ¿Cuál es su depósito inicial?

b. ¿Qué interés recibe?

c. En 3 años, ¿qué monto tendrá Laura en su cuenta?

d. ¿En cuánto tiempo aproximadamente Laura habrá duplicado su inversión?

7. El crecimiento de una planta es el 10 % cada semestre. Su altura inicial es de 10 cm.

a. ¿Cuál es la expresión que representa el cambio porcentual de su crecimiento?

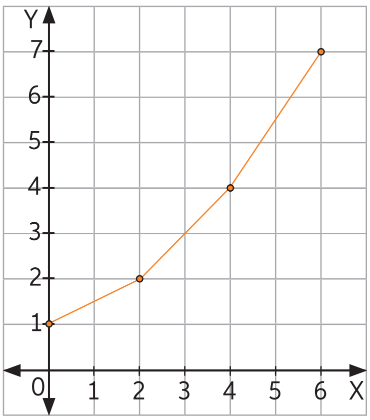
b. ¿Cuántos centímetros medirá después de 3 años?

c. ¿Cuándo medirá más de un metro?

d. Si es necesario podarla cuando mida 1,5 m, ¿en cuándo tiempo habrá que podarla?

8. El gráfico representa en el eje Y el índice de variación del valor de combustible por cada década transcurrida en el eje X. El valor inicial del combustible fue de $50.

**Valor del combustible**




a. ¿Cuál es el valor que alcanzó el combustible luego de transcurridas 6 décadas?

b. ¿Cuál será el valor del combustible luego de transcurridas 4 décadas?

# Antes de continuar

Lee atentamente y marca la alternativa correcta.

**1.** El índice de variación del dólar entre dos periodos de tiempo es 1,1. Su valor en el periodo inicial fue de \$650. ¿Cuál fue su valor en el periodo siguiente?

A. \$713,9
B. \$715
C. \$648,9
D. \$651,1

**2.** Respecto del índice de variación $I_v$ es correcto afirmar que:

I. Si $I_v = 1$, no hay variación entre un periodo y otro.
II. El $I_v$ siempre es mayor que cero.
III. El $I_v$ siempre es menor o igual a 2.

A. Solo I.
B. Solo II.
C. Solo III.
D. Solo I y II.

**3.** El kilogramo de pan entre enero y marzo varió de \$800 a \$840, para finalmente llegar a \$890. Por lo tanto, es correcto afirmar:

I. El $I_v$ entre enero y febrero es 1,05.
II. El $I_v$ entre febrero y mazo es 1,04.
III. Si el índice de variación de marzo-abril es igual al de enero-febrero, el kilogramo de pan en abril debería costar \$934,5.

A. Solo I.
B. Solo III.
C. Solo I y II.
D. Solo I y III.

**4.** La ecuación recursiva que representa un fenómeno que involucra un cambio porcentual constante está dada por:

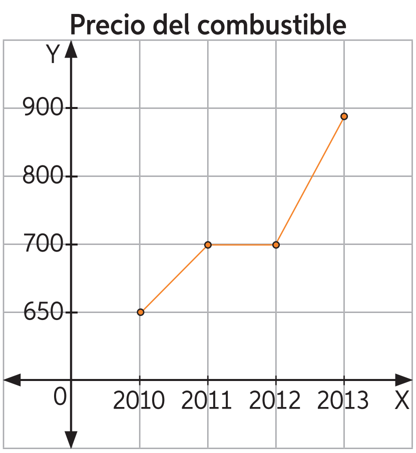
A. $f(t+1) - I_v f(t) = 0$
B. $f(t-1) - I_v f(t) = 0$
C. $f(t) - I_v f(t) = 0$
D. $f(t) - I_v f(t+1) = 0$

**5.** ¿En qué caso(s) el índice de variación es constante?

I. La tasa de desempleo aumentó 4 % este mes.
II. Cada año mueren 770 000 personas a causa de VIH.
III. La obesidad de cierta localidad aumenta cada año en 2 %.

A. Solo I.
B. Solo II.
C. Solo III.
D. Solo I y II.

**6.** El siguiente gráfico representa el precio promedio de combustible en una ciudad local.

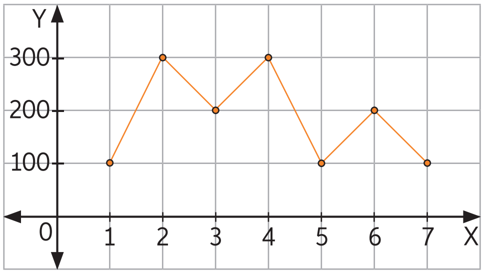



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

I. El $I_v$ entre 2010 y 2011 es igual al de 2012 y 2013.
II. El $I_v$ entre 2011 y 2012 es 1.
III. Si el $I_v$ entre 2012 y 2013 se mantiene, entonces el precio promedio del combustible en 2014 es de 980.

A. Solo I.
B. Solo II.
C. Solo III.
D. Solo I y III.

**7.** Dado el gráfico, ¿en qué periodos el índice de variación es $\frac{1}{2}$?




- **I.** Periodo 2-3
- **II.** Periodo 4-5
- **III.** Periodo 7-6

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo III.

**D.** Solo II y III.

**8.** A partir de la expresión recursiva del cambio porcentual, podemos:

- **I.** Determinar el valor inicial luego de *t* periodos de tiempo transcurridos.
- **II.** Determinar una expresión de manera recursiva de la forma: $f(t) = (I_v)^t \cdot f(1)$.
- **III.** Determinar el valor inicial de una variable.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo III.

**D.** Solo I y II.

**9.** El desgaste de las rocas de cierta playa causado por el oleaje es 3 % anual. La expresión que representa el cambio porcentual es:

**A.** $f(t) = 0{,}97^t$

**B.** $f(t) = 0{,}03^t$

**C.** $f(t) = 1 - 0{,}97^t$

**D.** $f(t) = 1 - 0{,}03^t$

**10.** El aumento semestral de la capacidad pulmonar de un corredor aficionado está dado por la expresión $f(t) = 0{,}8 \cdot 1{,}015^t$. Esto significa que:

- **I.** Aumenta un 1,5 % cada seis meses.
- **II.** La capacidad pulmonar inicial del corredor es 8 %.
- **III.** Al cabo de dos años su capacidad pulmonar habrá aumentado aproximadamente 5 %.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**11.** El valor de un producto es \$350 y aumenta en 20 %. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

**A.** Su nuevo valor será \$420.

**B.** Su índice de variación es 0,20.

**C.** Su cambio porcentual es negativo.

**D.** Aumenta \$70 a su precio.

**12.** ¿Cuál es el índice de variación de la siguiente situación: El valor de un curso de inglés tendrá un descuento del 15 % durante el mes de julio?

**A.** 1,85

**B.** 1,15

**C.** 0,85

**D.** 0,15

**13.** La superficie de un bosque es de 10 000 hectáreas. Si cada semana se reforesta el 10 % de la superficie, ¿cuánta superficie de bosque queda luego de 4 semanas?

**A.** 14 641 hectáreas.

**B.** 14 000 hectáreas.

**C.** 10 400 hectáreas.

**D.** 13 310 hectáreas.

## La ecuación de segundo grado

**1.** Indica con un ✓ si la ecuación es de segundo grado. De ser así, determina sus coeficientes *a*, *b* y *c*.

**a.** $(x-1)(x+1) = 0$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**b.** $x(x-2) = 1$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**c.** $x(x+1) = x^2$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**d.** $\frac{x+1}{2} = x^2$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**e.** $x^2 - x(x+2) = 1$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**f.** $x(x^2+1) = 0$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**g.** $x+2 = 0$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**h.** $x^2 = 1-\sqrt{2}$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**i.** $x^2 - x = x - x^2$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

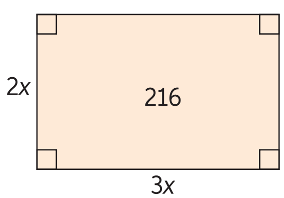
**j.** $4x = 7$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**k.** $x^2 - 2x = x(2x)$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

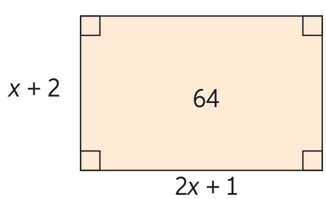
**l.** $x + x^2 = 1$
- Sí ____ No ____
- a: ________
- b: ________
- c: ________

**2.** Utilizando la equivalencia entre áreas, plantea la ecuación de segundo grado representada en cada caso.

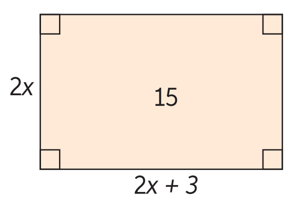
**a.** ________________



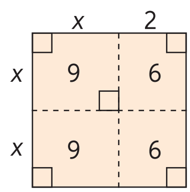

**b.** ________________



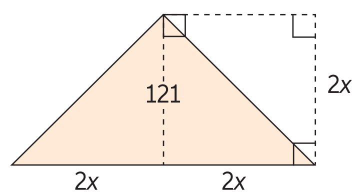

**c.** ________________



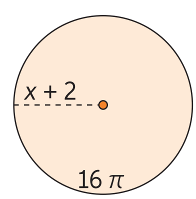

**d.** ________________




**e.** ________________



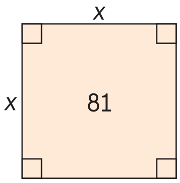

**f.** ________________



**3.** Representa en regiones las siguientes ecuaciones.

Ejemplo: $x^2 = 81$

Puede representarse en:




**a.** $x(x + 4) = 12$

**b.** $(x + 2)(x + 3) = 1$

**c.** $x^2 = 25\pi$

**d.** $\frac{x}{2}(x + 2) = 14$

**e.** $\frac{(x + 1)(x + 2)}{2} = 16$

**4.** ◆ ¿Son únicas las representaciones de la actividad anterior? Justifica tu respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

**5.** ◆ Evalúa si las soluciones propuestas satisfacen la ecuación dada marcando con un ✓. En caso contrario marca con una ✗.

**a.** $x^2 - 1 = 0$

- $x_1 = 1$ ______
- $x_2 = -1$ ______

**b.** $x^2 - 4 = 0$

- $x_1 = 2$ ______
- $x_2 = -2$ ______

**c.** $x^2 - 2x + 1 = 0$

- $x_1 = 1$ ______
- $x_2 = -1$ ______

**d.** $x^2 - 16 = 0$

- $x_1 = 4$ ______
- $x_2 = -4$ ______

**e.** $x^2 + x + 1 = 0$

- $x_1 = 0$ ______
- $x_2 = -1$ ______

**f.** $\frac{x^2}{4} - 25 = 0$

- $x_1 = 10$ ______
- $x_2 = -10$ ______

**6.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son números reales cualquiera.

______________________________

**b.** ______ En una ecuación de la forma $x^2 + bx = 4$, si $b = 0$ entonces la ecuación no es cuadrática.

______________________________

**c.** ______ Una ecuación de la forma $2x^2 + c = 0$ es cuadrática independiente del valor de $c$.

______________________________

**d.** ______ Una ecuación de segundo grado siempre tiene al menos una solución real.

______________________________

**e.** ______ Si una ecuación de segundo grado tiene una solución no real, entonces su otra solución tampoco lo es.

______________________________

**f.** ______ En una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siempre el coeficiente a debe ser un real positivo.

______________________________

**g.** ______ Una ecuación de segundo grado siempre tiene dos raíces distintas.

______________________________

**h.** ______ Una ecuación cuadrática siempre involucra una variable elevada a dos.

______________________________

**i.** ______ Raíz y solución de una ecuación representan el mismo concepto.

______________________________

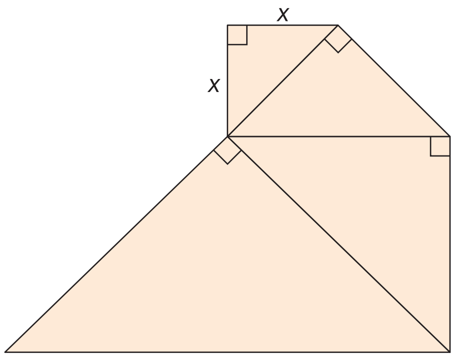
**j.** ______ Tanto $x_1 = 1$ como $x_2 = -1$ son raíces de la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$.

______________________________

**k.** ______ $x = -1$ es solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$ y de la ecuación $x^2 + x = 0$.

______________________________

**7.** ◆ La figura se compone de cuatro triángulos rectángulos isósceles.




**a.** El área del triángulo más pequeño es 18 $cm^2$. Plantea la ecuación cuadrática que modela el área del triángulo en términos de $x$.

**b.** Determina la longitud de las hipotenusas de los triángulos en términos de $x$ usando el teorema de Pitágoras.

**c.** El área del triángulo más grande es 144 $cm^2$. Plantea la ecuación cuadrática que modela el área del triángulo en términos de $x$.

**d.** Resuelve las ecuaciones anteriores planteadas en los ejercicios a y c.

**8.** En mecánica clásica la energía cinética $E_c$ medida en Joules (J) de una masa $m$ (en kg) se modela mediante la expresión $E_c = \frac{mv^2}{2}$. En esta, $v$ es la velocidad con la que se mueve de la masa. Escribe la ecuación cuadrática $av^2 + bv + c = 0$ en cada caso, identificando los valores *de a, b* y *c.*

**a.** $E_c = 1J$, m = 2 kg

**b.** $E_c = 5J$, m = 4 kg

**c.** $E_c = \sqrt{3}\,J$, m = $\sqrt{2}$ kg

# Resolución de una ecuación de segundo grado por factorización

**1.** Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones factorizadas.

**a.** $(x + 2)(x - 1) = 0$

**b.** $2x(x + 3) = 0$

**c.** $(3x + 1)(2x - 1) = 0$

**d.** $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) = 0$

**e.** $(1 - x)(x + 5) = 0$

**f.** $\left(\frac{x}{2} + 1\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$

**2.** Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando por término en común.

**a.** $3x^2 - 27x = 0$

**b.** $64x^2 - 128x = 0$

**c.** $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x = 0$

**d.** $-5x + 125x^2 = 0$

**e.** $-6x + 216x^2 = 0$

**f.** $\sqrt{2}x - \sqrt{6}x^2 = 0$

**g.** $2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{12}x = 0$

**h.** $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}x = 0$

**i.** $2\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$

**3.** ◆ Plantea una ecuación cuyas soluciones sean:

**a.** $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$

**b.** $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = 1$

**c.** $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

**4.** Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización de binomio cuadrado.

**a.** $x^2 + 4x + 4 = 0$

**d.** $49x^2 - 14x + 1 = 0$

**g.** $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

**b.** $4x^2 + 4x + 1 = 0$

**e.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$

**h.** $9x^2 - 2x + \frac{1}{9} = 0$

**c.** $x^2 - 6x + 9 = 0$

**f.** $16x^2 - 8x + 1 = 0$

**i.** $x^2 - 2x + 4 = 0$

**5.** Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando como suma por su diferencia.

**a.** $x^2 - 9 = 0$

**d.** $400x^2 - 441 = 0$

**g.** $9 - 2x^2 = 0$

**b.** $x^2 - 2021^2 = 0$

**e.** $1 - x^2 = 0$

**h.** $\frac{x^2}{4} - \frac{9}{16} = 0$

**c.** $x^2 - 3 = 0$

**f.** $49 - 4x^2 = 0$

**i.** $\frac{x^2}{2} - \sqrt{2} = 0$

**6.** Resuelve mediante factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas. Factoriza los trinomios considerando el producto de la forma $(Ax + B)(Cx + D)$.

**a.** $6x^2 + 7x + 2 = 0$

**b.** $2x^2 - 8x - 10 = 0$

**c.** $15x^2 - 2x - 1 = 0$

**d.** $4x^2 - 32x - 64 = 0$

**e.** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

**f.** $x^2 - 8x - 9 = 0$

**g.** $x^2 + 7x + 12 = 0$

**h.** $1 + 3x + 2x^2 = 0$

**i.** $-1 + 6x - 9x^2 = 0$

**7.** Factoriza para resolver cada una de las ecuaciones cuadráticas.

**a.** $x^2 - 4 = 0$

**b.** $\frac{x^2}{4} - 9 = 0$

**c.** $3x^2 + x = 0$

**d.** $-4x + 128x^2 = 0$

**e.** $x^2 - 14x + 49 = 0$

**f.** $3x^2 - x - 2 = 0$

**g.** $4x^2 + 16 = 3x^2 + 32$

**h.** $x^2 + 2 = 6x - 6$

**i.** $10x^2 + 5 = 9x + 5$

**8.** ◆ Analiza las siguientes afirmaciones y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ Si una ecuación de segundo grado se puede factorizar como suma por su diferencia y tiene como raíz $x_1 = a$, entonces su otra raíz es $x_2 = 0$.

**b.** ______ Una ecuación de segundo grado que se puede factorizar por binomio cuadrado siempre tendrá raíces iguales.

**c.** ______ Una ecuación de segundo grado que se puede factorizar por término común siempre tendrá como raíz $x = 0$.

**d.** ______ Si una ecuación cuadrática tiene raíces $x_1 = a$ y $x_2 = b$, entonces la ecuación necesariamente es de la forma $(x - a)(x - b) = 0$.

**e.** ______ Tanto $x^2 - 9 = 0$ como $2x^2 - 18 = 0$ tienen las mismas soluciones.

**f.** ______ La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no se puede factorizar como una suma por diferencia.

**g.** ______ Las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 77$ son $x_1 = 7$ y $x_2 = -11$.

**h.** ______ Las raíces de la ecuación $x^2 + x + 3$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$.

# Resolución de una ecuación de segundo grado por completación de cuadrados

**1.** Completa el término faltante en las siguientes ecuaciones para que correspondan a cuadrado de binomio perfecto. Luego, resuelve.

**a.** $x^2 + \_\_\_\_ x + 4^2 = 0$

**d.** $\frac{1}{2}x^2 + x + \_\_\_\_ = 0$

**g.** $x^2 + 9x + \_\_\_\_ = 0$

**b.** $x^2 + 2x + \_\_\_\_ = 0$

**e.** $x^2 + \_\_\_\_ x + \frac{1}{4} = 0$

**h.** $x^2 + \frac{4}{3}x + \_\_\_\_ = 0$

**c.** $\_\_\_\_ x^2 + 6x + 3 = 0$

**f.** $x^2 + \_\_\_\_ x + 3 = 0$

**i.** $4x^2 + 5x + \_\_\_\_ = 0$

**2.** ◆ Resuelve las siguientes ecuaciones desarrollando la completación de cuadrados.

**a.** $x^2 + 4x - 5 = 0$

**c.** $x^2 - 8x - 84 = 0$

**b.** $x^2 + 6x - 7 = 0$

**d.** $x^2 - 12x + 11 = 0$

**e.** $x^2 + 10x + 21 = 0$

**g.** $9x^2 + 12x - 12 = 0$

**f.** $x^2 - 10x + 21 = 0$

**h.** $9x^2 - 12x - 45 = 0$

**3.** ◆ Analiza la resolución mediante completación de cuadrados y usando raíces. Luego, resuelve a partir del ejemplo.

$x^2 - 2x - 2 = 0$ *Se completan cuadrados.*

$(x - 1)^2 - 3 = 0$ *Se reescribe el término libre como el cuadrado de una raíz.*

$(x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$ *Se resuelve de manera usual.*

$\left((x - 1) + \sqrt{3}\right) \cdot \left((x - 1) - \sqrt{3}\right) = 0$

$x = 1 - \sqrt{3}$ o $x = 1 + \sqrt{3}$

**a.** $(x + 2)^2 - 7 = 0$

**c.** $(3x + 5)^2 - \frac{1}{3} = 0$

**b.** $(3x + 1)^2 - 3 = 0$

**d.** $(1 - x)^2 - \sqrt{2} = 0$

e. $x^2 + 2x - 5 = 0$

i. $9x^2 - 6x - 13 = 0$

f. $x^2 - 2x - 10 = 0$

j. $25x^2 + 20x = 16$

g. $16x^2 - 8x - 1 = 0$

k. $4x^2 + 4x = \sqrt{7} - 1$

h. $4x^2 + 4x - 7 = 0$

l. $4x^2 - 12x + \frac{17}{2} = 0$

4. ◆ Resuelve los siguientes problemas.

a. La longitud del lado de un rectángulo es 2 cm mayor que el otro. Además, su área es de 14 $cm^2$. ¿Cuál es la medida del lado mayor?

b. El cateto de un triángulo rectángulo es 5 cm más largo que el otro y su área es 16 $cm^2$. ¿Cuál es la medida de sus catetos?

c. El lado mayor de un rectángulo mide 12 cm más que el otro. Si área es 60 $cm^2$, ¿cuál es la medida del lado menor?

5. ◆ Para cada valor de $k$, determina si la ecuación $x^2 - x + k = 0$ se puede resolver con completación de cuadrados. De ser así, resuélvela usando este método.

a. $k = -2$

c. $k = -1$

b. $k = -\frac{1}{2}$

d. $k = \sqrt{2}$

6. ◆ Analiza cada afirmación e indica si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ Las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 - 14 = 0$ son $-15$ y $-13$.

b. ______ La ecuación $x^2 - 4x + 7 = 0$ no puede ser factorizada por completación de cuadrados.

c. ______ Las soluciones de la ecuación $((x - 1) + 3) \cdot ((x - 1) - 3) = 0$ son $-4$ y $-2$.

d. ______ La ecuación $(3x - 1)^2 = (x - 1)^2$ es equivalente a la ecuación $(x - 2)^2 - 2^2 = 0$.

# Resolución de una ecuación de segundo grado por fórmula general

**1.** Resuelve las ecuaciones usando la fórmula general.

**a.** $x^2 - 18x + 81 = 0$

**b.** $x^2 = 121$

**c.** $4x^2 = -10x + 14$

**d.** $x^2 - 21x + 7 = 0$

**e.** $3x^2 - 12x = 0$

**f.** $3x^2 - 9x + 1 = 0$

**g.** $x^2 + 4x = 0$

**h.** $16x^2 - 8x + 1 = 0$

**i.** $-8x^2 + 16x - 1 = 0$

**2.** ◆ Sin resolver, determina si las siguientes ecuaciones poseen raíces reales o no. En caso de que sean reales, indica si son iguales o distintas.

**Para comprobar.**
gbit.cl/C21M2MP052A

**a.** $x^2 + x + 14 = 0$

**b.** $4x^2 - 16 = 0$

**c.** $x^2 + x + 1 = 0$

**d.** $4x^2 - 8x = -1$

**e.** $x^2 + 81 = -18x$

**f.** $x^2 = \frac{1}{2}x - 1$

**3.** Inventa dos ecuaciones cuadráticas e intercámbialas con un compañero. Identifica qué tipo de raíces tienen y resuélvelas usando la fórmula general.

**a.** $\_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_ x + \_\_\_\_ = 0$

**b.** $\_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_ x + \_\_\_\_ = 0$

4. ◆ Resuelve los siguientes problemas a partir de una ecuación cuadrática.

a. La suma del cuadrado de un número y el cuadrado de su inverso aditivo es 50. ¿Cuáles son los números?

b. El área de un triángulo de altura $4x + 1$ y base $2x$ es 39 $cm^2$. ¿Cuál es la medida de su altura?

c. La suma de los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es 290. ¿Cuáles son los números?

d. El área de un rectángulo de lados $2x + 1$ y $3x + 6$ es 5 $cm^2$. ¿Cuál es la medida de su lado más largo?

e. El radio de un círculo aumenta en 6 cm y su área aumenta a nueve veces la original. ¿Cuál era el radio inicial?

f. La suma de tres pares consecutivos al cuadrado es 144. ¿Cuáles son los números?

g. El área total de dos cuadrados es de $(2x^2 - 4x + 280)$ $cm^2$. ¿Qué medida tiene el lado de cada cuadrado si el lado de uno es 4 cm mayor que el otro?

5. ◆ Determina el valor de $k$, único o un intervalo, para que la ecuación tenga raíces reales.

a. $x^2 + k = 0$

e. $x^2 + 2kx + k^2 = 0$

b. $x^2 + kx + 1 = 0$

f. $x^2 - (4k + 1)x - k^2 = 0$

c. $x^2 + 4x + k = 0$

g. $kx^2 - 10k - 8 = 0$

d. $k^2x^2 - 4kx + 1 = 0$

h. $(k+1)x^2 + (4 + k)x - 3 = 0$

6. ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ La ecuación $4x^2 + x + k = 0$ tiene soluciones reales cuando $k = 0$.

b. ______ El discriminante de la ecuación $(k + 1)x^2 + x + k = 0$ es negativo si $k = -2$.

c. ______ El discriminante de la ecuación $kx^2 + kx - \frac{1}{4k} = 0$ es siempre 0, independiente del valor que tome $k$.

**7.** ◆ Determina una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que satisfaga la condición indicada. Luego, resuélvela.

**a.** Debe tener como solución $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$.

**b.** Tiene como solución $x_2 = \sqrt{2}$ y el producto de sus soluciones es 4.

**c.** La suma de sus soluciones es $\frac{1}{4}$, su producto es 0.

**d.** Tiene como solución $x_1 = 1$ y la suma de sus soluciones es 5.

**e.** Una de sus raíces el doble de la otra y $a = b = 6$.

**f.** El producto de las raíces de la ecuación es 3 y $a = 1$, $b = 3$ .

# Antes de continuar

Lee atentamente y marca la alternativa correcta.

**1.** Al agrupar términos, ¿cuál(es) de las siguientes ecuaciones origina(n) una ecuación de segundo grado?

**I.** $2x^2 - x = 10 + 4x - x^2$

**II.** $x^2 - 2x = x + x^2 + 1$

**III.** $\sqrt{2}x = (\log 3)x^2$

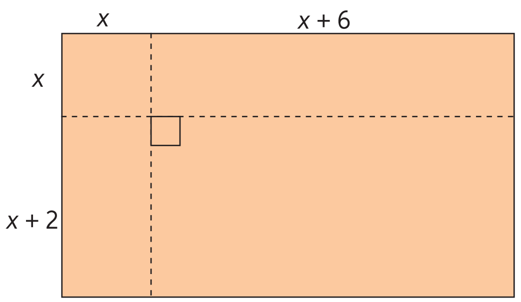
**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**2.** El área del rectángulo mayor de la figura es de 64 $cm^2$.




¿Cuál es la ecuación que relaciona el área total y sus lados?

**A.** $x(x + 2) + x(x + 6) = 64$

**B.** $(2x + 2)(2x + 6) = 64$

**C.** $x(x + 6) + x(x + 3) = 64$

**D.** $x^2 + (x + 2)(x + 6) = 64$

**3.** ¿En cuál(es) de las siguientes ecuaciones una de sus soluciones es $x = 1$?

**I.** $x^2 - x = 0$

**II.** $x^2 - 1 = 0$

**III.** $x^2 - 5x + 6 = 0$

**A.** Solo II.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**4.** Dada la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, es correcto afirmar:

**I.** Si $b = c = 0$, entonces la ecuación tiene como única solución $x = 0$.

**II.** Si $b = 0$ y $c > 0$, entonces la ecuación no posee soluciones reales.

**III.** Si $c = 0$, entonces la ecuación tiene como soluciones $x = 0$ y $x = b$.

**A.** Solo I.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**5.** Un triángulo de base $x$ y altura $2x + 3$ cm tiene un área de 7 $cm^2$. ¿Cuál es la longitud de su altura?

**A.** 3,5 cm.

**B.** 7 cm.

**C.** $\frac{\sqrt{65}}{4} - \frac{3}{4}$ cm.

**D.** $\frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{3}{2}$ cm.

**6.** A partir de la ecuación $x^2 - 3 = 0$, es correcto afirmar:

**I.** Se puede factorizar como $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.

**II.** Tiene como solución $x = \pm\sqrt{3}$.

**III.** El coeficiente $b = 0$.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**7.** Una ecuación cuadrática que se puede factorizar como suma por diferencia tiene como raíz $x = 4$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

**A.** Otra de sus soluciones es $x = 0$.

**B.** La ecuación corresponde a $x(x - 4) = 0$.

**C.** La ecuación se puede factorizar como $a(x + 4)(x - 4) = 0$.

**D.** La ecuación en cuestión es $x^2 - 6x + 8 = 0$

**8.** Con respecto a las distintas maneras de factorizar una ecuación de segundo grado, es correcto afirmar:

**I.** Una ecuación que se puede factorizar por término común siempre tendrá como raíz $x = 0$.

**II.** Una ecuación que se puede factorizar por binomio cuadrado siempre tendrá raíces iguales.

**III.** Una ecuación que puede factorizarse por suma por diferencia siempre tendrá raíces que difieren solo de su signo.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**9.** Dada la ecuación $x^2 - 18x + k = 0$, ¿para qué valores de $k$ la ecuación se puede resolver con completación de cuadrados?

**I.** $k = 0$

**II.** $k = -2$

**III.** $k = 10$

**A.** Solo II.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**10.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene raíces reales iguales?

**A.** $x^2 + x + 1 = 0$

**B.** $x^2 - 9 = 0$

**C.** $x^2 - 24x + 144 = 0$

**D.** $3x^2 - 4x = 0$

**11.** Dada la ecuación $x^2 - kx + 1 = 0$, ¿para qué valores de $k$ la ecuación tiene raíces reales?

**A.** $k^2 > 4$

**B.** $k^2 \geq 4$

**C.** $k^2 < 4$

**D.** $k^2 \leq 4$

**12.** La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 200. ¿Cuál es el número menor?

**A.** 6

**B.** 8

**C.** 36

**D.** 100

**13.** Un cuadrado de lado $(x + 2)$ y un rectángulo de lados $x$ y $(2x + 6)$ tienen igual área. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

**A.** $\sqrt{5} - 1$

**B.** $-\sqrt{5} - 1$

**C.** $\sqrt{5} + 1$

**D.** $2\sqrt{5} + 4$

**14.** ¿Qué valor debe tener k para que la ecuación $x^2 + kx + 4 = 0$ tenga soluciones reales e iguales?

**I.** $k = 4$

**II.** $k = -4$

**III.** $k = 0$

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

Lección 6

# Funciones de segundo grado

## Función cuadrática

**1.** ◆ Marca con un ✓ las expresiones que correspondan a una función de segundo grado. Marca con una ✗ aquellas que no lo son. Justifica tus respuestas.

a. $\sqrt{x} - 1 = f(x)$ ______

d. $3x^2 - 3x + 2 = 0$ ______

g. $3x - 2 = y$ ______

b. $f(x) = 3x - 1$ ______

e. $t(x) = 2x^2 - 3x$ ______

h. $y^2 - 3x^2 = 1$ ______

c. $4x^3 - 2 = 0$ ______

f. $3x - 16^2 = h(x)$ ______

i. $3x - x^2 = y$ ______

**2.** Determina los coeficientes *a*, *b* y *c* de cada una de las siguientes funciones cuadráticas. Reduce términos semejantes si es necesario.

a. $3x^2 - 5x + 2 = f(x)$

d. $4x - 3 - x^2 - 3x + 2 = i(x)$

b. $2x^2 - 2x - 5 = g(x) - x^2 + 4$

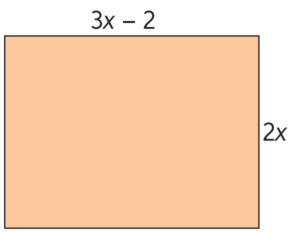
e. $\frac{4}{3}x^2 - 3 - j(x) = 2x - 6x^2$

c. $\frac{3}{5}x^2 - h(x) + 2 + x^2 - 5 = 2x$

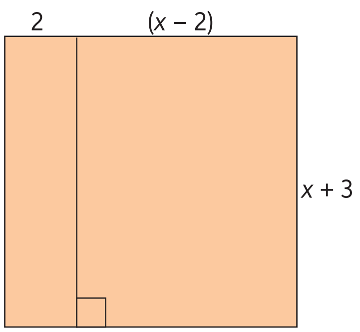
f. $3x - 5x^2 = k(x) + 2 - \frac{3}{2}x$

3. ◆ Determina cada función que representa el área de las figuras rectangulares.

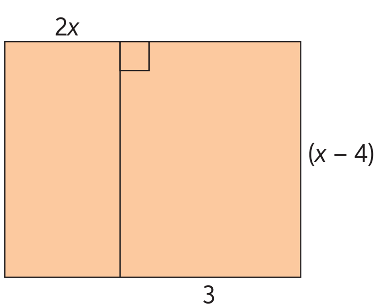
a.



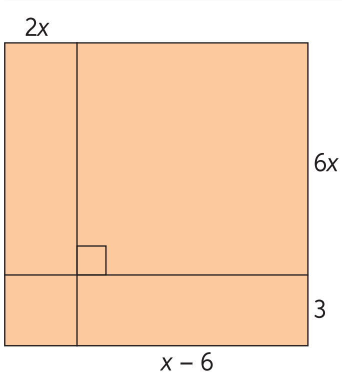

b.



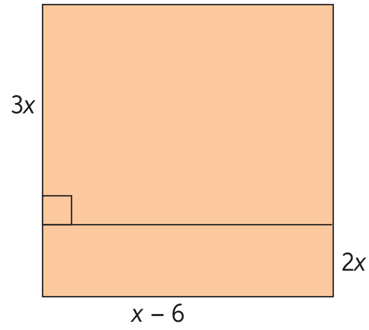

c.



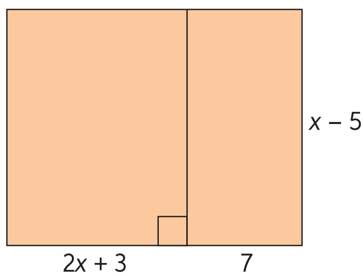

d.



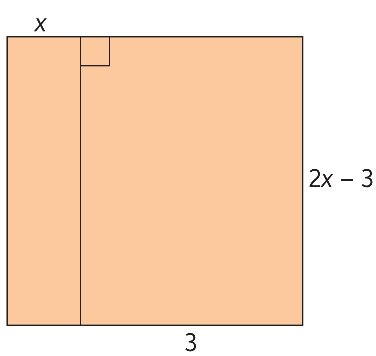

e.



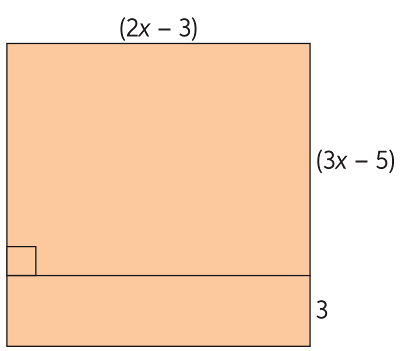

f.



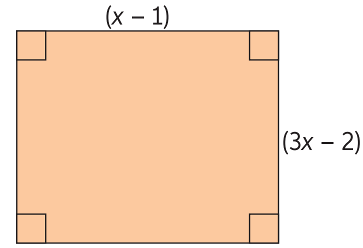
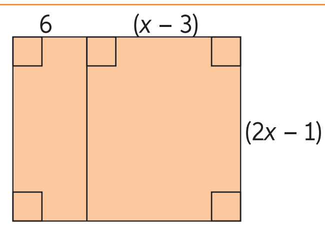

g.




h.



**4.** ◆ Completa la tabla con la función y dibujando el área que representa.

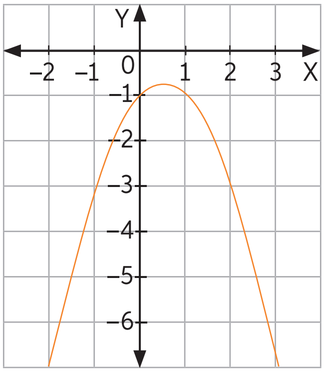
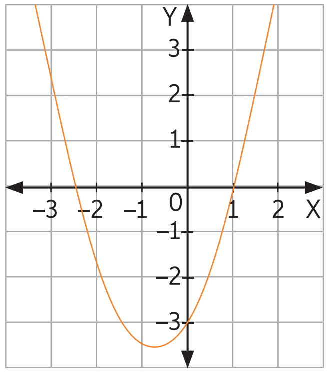
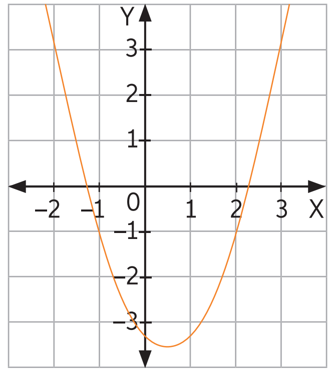
| Función | Área que representa |
|---|---|
| $A_1(x) = (3x - 1)(x + 2)$ | |
| |   |
| $A_3(x) = (2x + 1)(x - 1)$ | |
| |   |

**5.** Determina la imagen de las funciones según el valor de $x$.

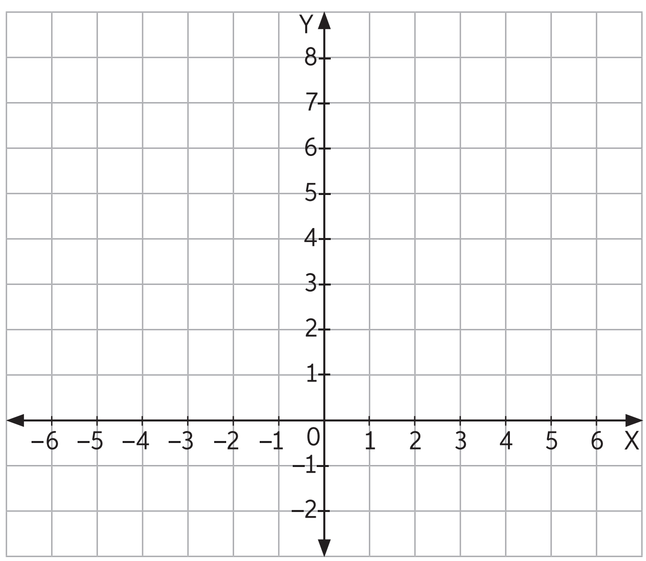
| Función | Valor de $x$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | –1 | 0 | 1 | 3 |
| $f(x) = 2x^2 + 7$ | | | | |
| $g(x) = x^2 - 3x + 1$ | | | | |
| $p(x) = -2x^2 + 3$ | | | | |
| $t(x) = 4x - 2x^2 + 1$ | | | | |
| $h(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ | | | | |
| $o(x) = x - x^2$ | | | | |
| $q(x) = -3x^2 + x + 1$ | | | | |

# Representación de una función cuadrática

**1.** Marca con una X los puntos que pertenecen a cada función.

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| (3, 3) | | | |
| (−2, 3) | | | |
| (0, −3) | | | |
| (0, −1) | | | |
| (2, 3) | | | |
| (2, −3) | | | |
| (−3, 3) | | | |
| (1, −5) | | | |

**2.** ◆ Determina el tipo de concavidad, vértice, eje de simetría e intersección con los ejes de la siguiente función. Luego, esboza su gráfico.

| **Función** | | |
|---|---|---|
| $f(x) = x^2 + 2x + 1$ | Concavidad |  |
| | | |
| | Vértice | |
| | | |
| | Eje de simetría | |
| | | |
| | Intersección con los ejes | |
| | | |

**3.** Revisa la actividad de profundización 6 de la página 68 del texto del estudiante. Luego, identifica dónde se encuentran los siguientes puntos respecto de las funciones ($y > f(x)$ o $y < f(x)$):

**a.** $f(x) = 2x^2 + x - 1$

- (−1, 2)
- (2, 4)
- (1, 0)
- (0, 3)
- (−2, 5)
- (−1, 1)

**b.** $f(x) = -3x^2 + x - 2$

- (−1, 0)
- (1, 1)
- (0, −2)
- (1, 0)

**4.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** Una función interseca el eje X dependiendo del valor de la discriminante (Δ).

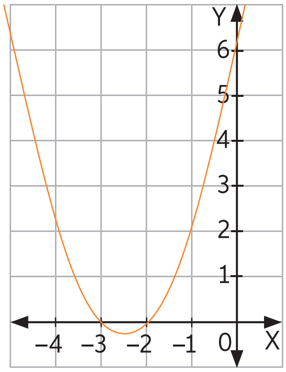
**b.** Las raíces de una función son (0, −3) y (0, 3). Esto significa que el discriminante es mayor que cero.

**c.** Las coordenadas de las intersecciones de una función cuadrática con el eje Y son llamadas raíces.

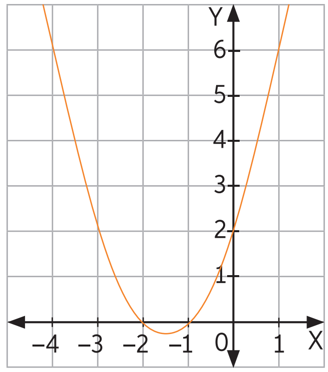
**d.** Una función cuadrática interseca el eje Y solo si el determinante es negativo.

**5.** Establece la expresión algebraica de las funciones representadas.

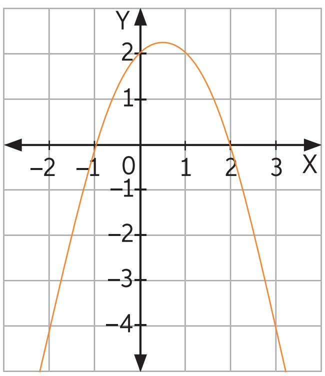
**a.**



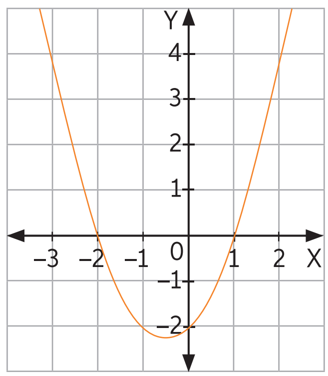

**c.**




**b.**




**d.**




**6.** ◆ Calcula el valor de la determinante de cada función. ¿Cuáles tienen raíces reales? Luego, construye cada una usando el programa del link.

**a.** $f(x) = 3x^2 + 2$

**b.** $g(x) = -2x + x^2 + 1$

**Para construir**
gbit.cl/C21M2MP063A

c. $h(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12$

f. $k(x) = 2x + 3x^2$

d. $i(x) = -x + 2x^2 - 11$

g. $l(x) = 9x^2$

e. $j(x) = x^2 + 2x + 1$

h. $m(x) = -x - x^2 - 1$

**7.** Completa la siguiente tabla de valores para cada función.

| Función | Valor de *x* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x) = x^2 + 3x - 5$ | | | | | |
| $g(x) = 2x^2 - x + 1$ | | | | | |
| $h(x) = x^2 - 3x$ | | | | | |
| $i(x) = -3x^2 + 2$ | | | | | |
| $j(x) = 6x^2 - 3x$ | | | | | |
| $k(x) = -x^2 + 3x - 5$ | | | | | |
| $l(x) = x^2 + x + 1$ | | | | | |
| $m(x) = 4x^2 - 5x$ | | | | | |
| $n(x) = x^2 + 2x - 1$ | | | | | |

**8.** Determina la concavidad y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes funciones. Luego, grafícalas.

a. $f(x) = x^2 + 3x - 2$

b. $g(x) = 3x^2 - 2$

c. $h(x) = 4x^2 + 2x$

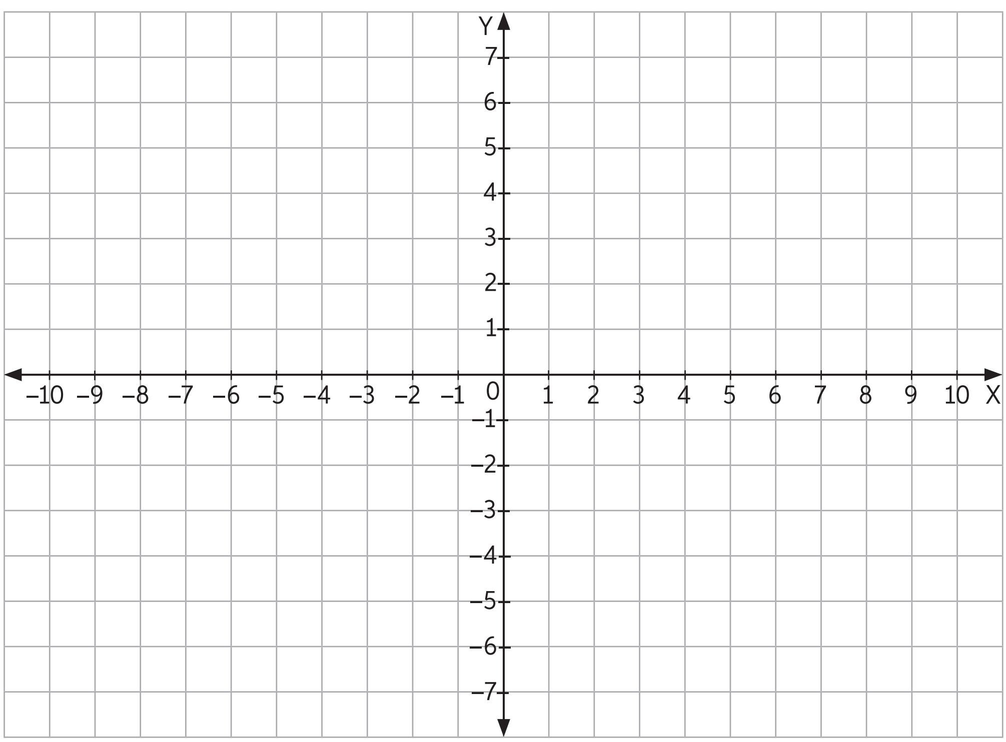
d. $p(x) = -x^2 + 2$

e. $q(x) = 5x^2 - 1$

f. $r(x) = -3x^2 + 3x - 2$

g. $s(x) = 4x^2 + 6$

h. $t(x) = x^2 - 1$



# Variación de parámetros de una función cuadrática

**1.** Transforma las siguientes funciones a su forma canónica.

**a.** $f(x) = x^2 + 3x - 2$

**e.** $j(x) = -2x^2 + 1$

**b.** $g(x) = -3x^2 + 2$

**f.** $k(x) = -x^2 + 3x - 1$

**c.** $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}$

**g.** $l(x) = -4x + 6 + x^2$

**d.** $i(x) = x^2 - 2x + 1$

**h.** $m(x) = -3x^2 + 5$

**2.** ◆ Establece la representación de una función en su forma canónica dados los siguientes vértices:

**a.** $\left(-\frac{2}{5}, -6\right)$

**d.** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

**g.** $(-1, 2)$

**b.** $(1, 2)$

**e.** $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

**h.** $(0, -2)$

**c.** $(-1, 4)$

**f.** $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

**i.** $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

j. $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

l. (0, 0)

n. $\left(\frac{1}{5},2\right)$

k. $\left(-\frac{1}{3},-5\right)$

m. (0, − 4)

o. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

**3.** ◆ En parejas, analicen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Luego, justifiquen las falsas.

a. La forma canónica de una función cuadrática es la menos indicada para deducir la gráfica de la función cuadrática.

b. El movimiento en el eje X está asociado al parámetro $k$.

c. Si $k < 0$, la gráfica se mueve hacia arriba en $|k|$ unidades.

d. El movimiento en el eje X está asociado al parámetro $h$.

e. La función $t(x) = x^2 + 4x - 2$ en su forma canónica es $t(x) = (x + 2)^2 - 6$.

f. La función $g(x) = x^2$ no posee representación en su forma canónica.

**4.** Los siguientes puntos representan los vértices de la traslación de la función $f(x) = 2x^2$. Escribe cada una de sus representaciones canónicas y construye sus gráficas.

**a.** (2, 2)

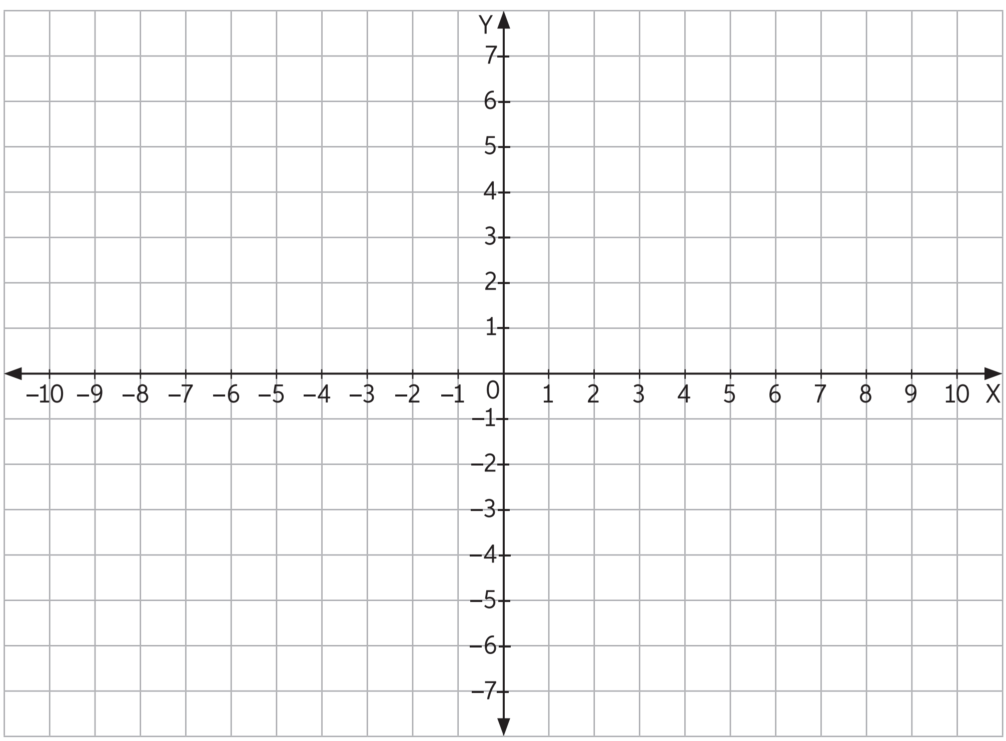
**b.** (−1, 2)

**c.** (1, 1)

**d.** (2, 1)

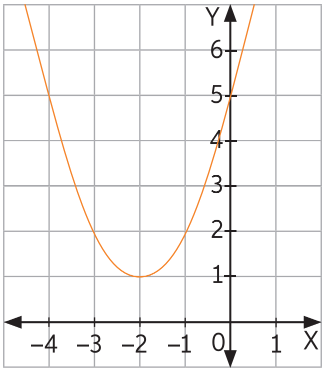
**e.** (−1, −1)

**f.** (−2, 1)



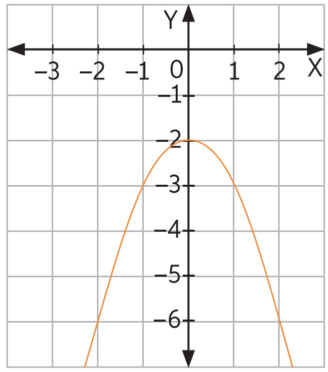
**5.** Analiza las gráficas y determina los valores de $h$ y $k$ faltantes.

**a.**



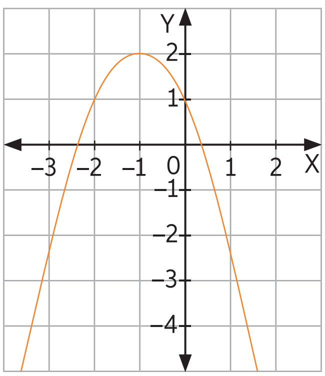

$f(x) = (x - h)^2 + k$

**d.**



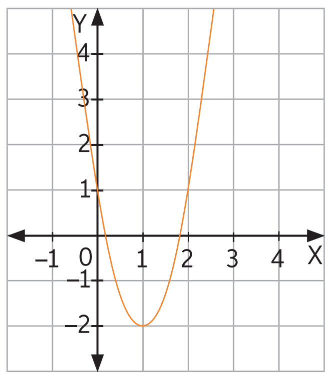

$f(x) = -(x - h)^2 + k$

**b.**



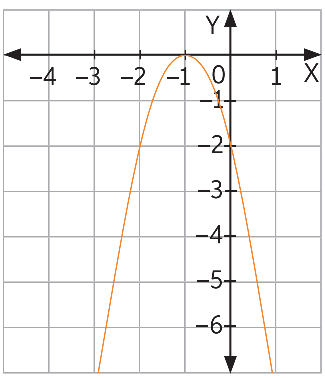

$f(x) = -(x - h)^2 + k$

**e.**



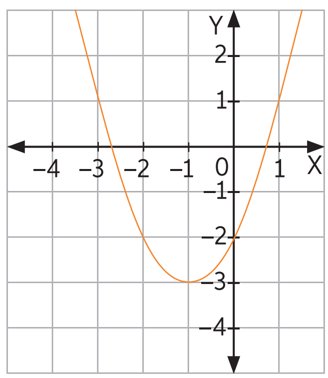

$f(x) = 3\,(x - h)^2 + k$

**c.**




$f(x) = -2\,(x - h)^2 + k$

**f.**




$f(x) = 3\,(x - h)^2 + k$

# Aplicaciones de la función cuadrática

1. ◆ Plantea una función cuadrática adecuada y resuelve la situación.

a. Los lados de un rectángulo miden $x$ y $(x + 2)$.

- ¿Cuál es la función que modela el área del rectángulo?
- ¿Cuál es el área del rectángulo si su lado más pequeño mide 2021?

b. El cateto de un triángulo rectángulo mide 10 unidades más que el otro.

- ¿Cuál es la función que modela la magnitud de la hipotenusa al cuadrado?
- ¿Cuál es la función que modela el área del triángulo?
- El cateto más pequeño mide 1 unidad. ¿Cuánto mide su hipotenusa?
- ¿Cuál es el área del triángulo si su cateto más grande mide 12 unidades?
- ¿Cuánto debe medir el cateto para que la hipotenusa mida 20 unidades?
- ¿Cuánto debe medir su cateto más grande para que el área sea 12 unidades?

c. ¿Existe algún valor tal que el área del triángulo del ejercicio anterior coincida con la magnitud del cateto al cuadrado del triángulo? Plantea la ecuación correspondiente. Luego, justifica tu respuesta.

2. ◆ La función $f(x) = -x^2 + 4x$ describe la posición del lanzamiento de un balón. En ella, $x$ representa la distancia horizontal recorrida (en metros) y $f$ la altura respecto al suelo (en metros).

a. ¿A qué altura se encontrará el balón si este recorre una distancia horizontal de 3 metros?

b. ¿Es posible calcular la distancia horizontal recorrida del balón cuya altura es 6 metros?

c. ¿A qué distancia horizontal el balón alcanzará su altura máxima?

d. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

3. ◆ El lanzamiento parabólico (a partir del suelo) de un objeto se modela con la función $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$. En ella, $v_0$ corresponde a la velocidad inicial con la que es lanzada medida en $\frac{m}{s}$, $g$ es la constante aceleración de gravedad, $t$ el tiempo en segundos y $h$ es la altura en metros del objeto. En un planeta tiene una aceleración de gravedad de $g = 20$ se lanza el objeto con una velocidad inicial de $5 \frac{m}{s}$.

a. ¿Cuál es la función que modela la situación?

b. ¿Es correcto afirmar que el objeto se encuentra a la misma altura al cabo de 0,1 y 0,4 segundos?

c. ¿A qué altura se encontrará el objeto al cabo de 0,2 segundos?

d. ¿Cuánto tiempo tarda en caer al suelo?

e. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar su altura máxima?

f. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?

4. ◆ Inventa el nombre de un planeta ficticio e indica su aceleración de gravedad. Intercambien sus datos en parejas para que responda las siguientes preguntas:

a. Nombre del planeta: ______________________

b. Aceleración de gravedad del planeta $g$: ______ $\frac{m}{s^2}$

c. Se lanza un objeto con velocidad inicial igual (en magnitud) a la aceleración de gravedad del planeta. ¿Cuál es la función que modela el lanzamiento?

$h(t) =$ ____________

d. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

e. ¿Cuánto tiempo tarda en caer al suelo?

5. ◆ Las ventas de un producto novedoso y popular pueden ser modeladas mediante la función $f(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + 36$. En ella, $f$ representa la cantidad de ejemplares vendidos y $x$ la cantidad de días transcurridos desde su lanzamiento.

a. ¿Cuántos ejemplares se vendieron el día del lanzamiento?

c. ¿Cuál fue el máximo de ejemplares vendidos en un solo día?

b. ¿Cuántos ejemplares se vendieron al cabo de 10 días?

d. ¿En cuántos días las ventas desaparecen por completo?

6. ◆ Un comerciante ha hecho un estudio para fijar el precio de un artículo ($p$) en función de la cantidad de unidades que vende al mes ($x$). La relación que ha determinado es $p = 6000 - 5x$ .

a. Si el ingreso I corresponde a $I = px$, determina la expresión que modela el ingreso del comerciante en función del precio de los artículos.

b. A partir de la pregunta anterior, ¿cuál debe ser el precio de los artículos para que se perciba la mayor ganancia posible?

c. ¿Entre qué valores debe variar el precio de venta que tenga un ingreso mínimo de $1 000 000?

d. Determina la expresión que modela el ingreso del comerciante en función de la cantidad de unidades vendidas.

e. ¿Cuál es el ingreso del comerciante cuando vende 300 unidades mensuales?

f. Sabiendo que en general no vende más de 500 unidades mensuales, ¿cuál es el máximo ingreso que puede obtener?

## Antes de continuar

Lee atentamente y marca la alternativa correcta.

**1.** Son funciones de segundo grado:

**I.** $x^2 = -3$

**II.** $t(x) = 16^2 - x$

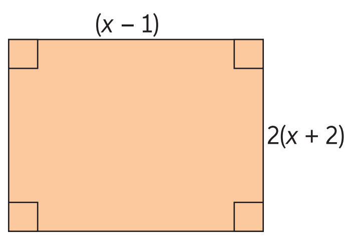
**III.** $q(x) = -\sqrt{2}x^2 - 11$

**A.** Solo I.
**B.** Solo II.
**C.** Solo III.
**D.** Solo I y II.

**2.** Los coeficientes *a*, *b* y *c* de la función cuadrática $p(x) - 1 = -x + 2x^2 + 6$ son:

**A.** $a = 2, b = 3, c = 6$
**B.** $a = -2, b = 2, c = 7$
**C.** $a = 2, b = -1, c = 7$
**D.** $a = -2, b = 1, c = -7$

**3.** ¿Qué alternativa corresponde al área de la siguiente figura?




**A.** $a(x) = 2(x-1)^2$
**B.** $a(x) = (x-1)(2x+2)$
**C.** $a(x) = 2x^2 - 2x - 2$
**D.** $a(x) = 2x^2 + 2x - 4$

**4.** Los coeficientes de una función son $a = -1$, $b = 2$ y $c = -2$. Entonces, la función corresponde a:

**A.** $a(x) = x^2 - 2x - 2$
**B.** $b(x) = 2(x-1) - x^2$
**C.** $c(x) = 3x^2 - x + 2x - x^2 + 1$
**D.** $d(x) = 2x + 2x - x^2$

**5.** Dada la función $h(x) = 2(x+1)^2$, es correcto afirmar:

**I.** $h(1) + h(-1) = 0$

**II.** $h(2) = 2^3$

**III.** $h(3) + h(5) = 2^3(2^2 + 3^2)$

**A.** Solo I.
**B.** Solo III.
**C.** Solo I y II.
**D.** Solo II y III.

**6.** Dada la función $r(s) = -s^2 + 2$, ¿cuál de los siguientes puntos forma parte de su gráfica?

**A.** (1,1)
**B.** (2, 0)
**C.** (−1,2)
**D.** (3,7)

**7.** Dada la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ podemos afirmar que:

**I.** Su intersección con el eje Y es 1.

**II.** Es cóncava hacia arriba.

**III.** Su determinante es 37.

**A.** Solo II.
**B.** Solo III.
**C.** Solo II y III.
**D.** I, II y III.

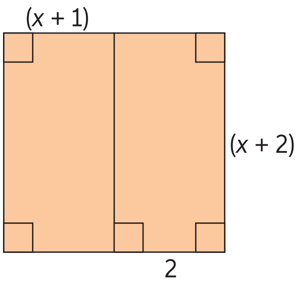
**8.** La representación canónica de la función $g(x) = x^2 - x + 1$ corresponde a:

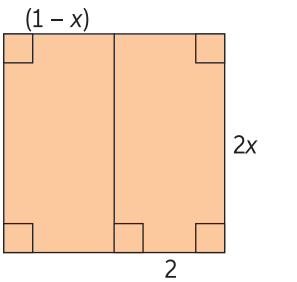
**A.** $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
**B.** $g(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
**C.** $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$
**D.** $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$

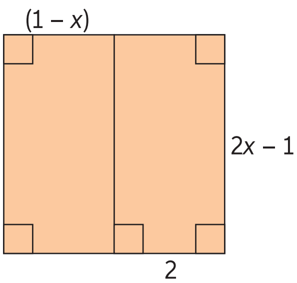
**9.** ¿Cómo se llama la figura que se forma al graficar una función cuadrática?

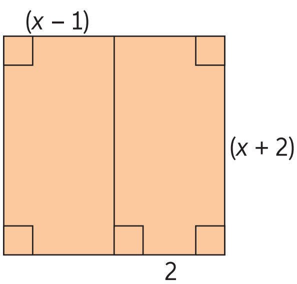
**A.** Recta.
**B.** Parábola.
**C.** Semicírculo.
**D.** Círculo.

**10.** La función área $j(x) = x^2 + 3x + 2$ está representada por el gráfico:

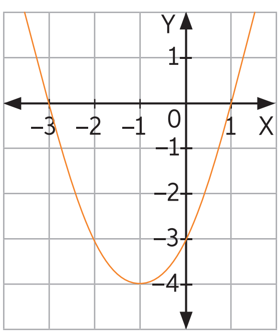
**A.**


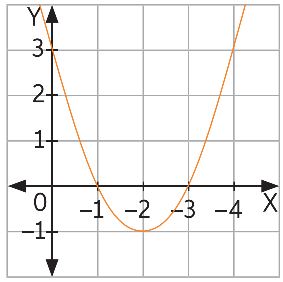

**B.**


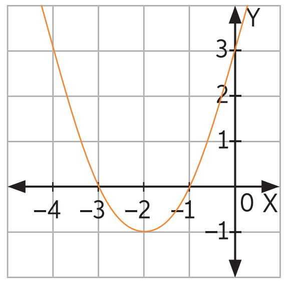

**C.**


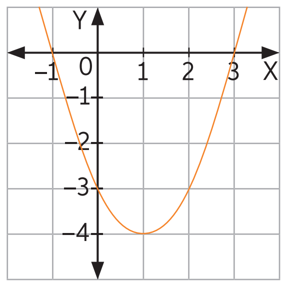

**D.**



**11.** ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la función $x^2 + 2x - 3$?

**A.**



**B.**



**C.**



**D.**



**12.** ¿Qué fenómeno(s) puede(n) modelarse mediante una función cuadrática?

- **I.** El lanzamiento de una pelota de básquetbol.
- **II.** La curvatura de la rampa de un parque de patinetas.
- **III.** La altura de una persona a medida crece.

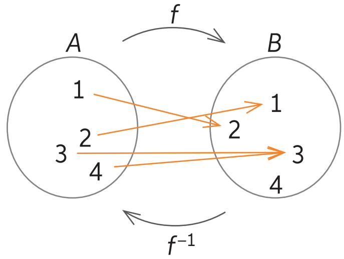
**A.** Solo I.
**B.** Solo II.
**C.** Solo I y III.
**D.** Solo I y II.

# Función inversa

## Definición de la función inversa

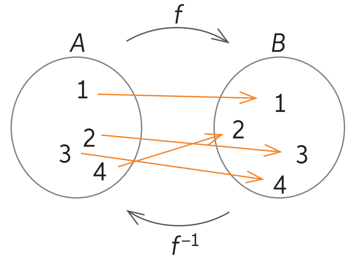
**1.** Identifica *Dom f*, *Codom f*. Indica si $f^{-1}$ existe. De ser así, determina Dom $f^{-1}$ y Codom $f^{-1}$

**a.**



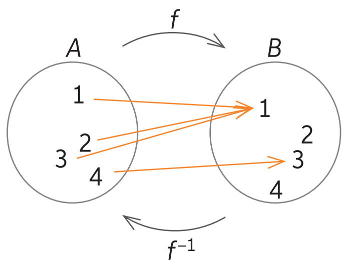

- Dom *f*: ____________________
- Codom *f*: ____________________
- ¿Existe $f^{-1}$? ____________________
- Dom $f^{-1}$: ____________________
- Codom $f^{-1}$: ____________________

**c.**



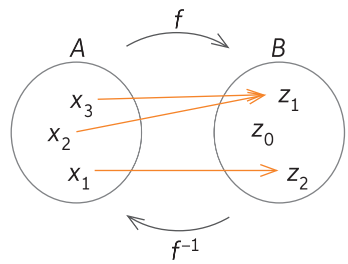

- Dom *f*: ____________________
- Codom *f*: ____________________
- ¿Existe $f^{-1}$? ____________________
- Dom $f^{-1}$: ____________________
- Codom $f^{-1}$: ____________________

**b.**




- Dom *f*: ____________________
- Codom *f*: ____________________
- ¿Existe $f^{-1}$? ____________________
- Dom $f^{-1}$: ____________________
- Codom $f^{-1}$: ____________________

**d.**




- Dom *f*: ____________________
- Codom *f*: ____________________
- ¿Existe $f^{-1}$? ____________________
- Dom $f^{-1}$: ____________________
- Codom $f^{-1}$: ____________________

**2.** Describe la función *f* o $f^{-1}$ en lenguaje natural según corresponda.

| Descripción de *f* | Descripción de $f^{-1}$ |
|---|---|
| Duplica un número | |
| Aumenta un número en dos unidades, luego lo divide por tres | |
| Transforma un número en su sucesor | |
| | Resta 5 unidades a un número |
| | Multiplica un número por 2/3 |
| | Divide el número por 5 |

**3.** $A$ = {números pares mayores que 3 y menores que 9} y $f$ es una función que transforma cada número de $A$ en su sucesor. Determina:

**a.** Una expresión algebraica de $f$.

______________________________

**b.** Recorrido de $f$.

______________________________

**c.** Una expresión algebraica para $f^{-1}$.

______________________________

**4.** Realiza las actividades para cada tabla.

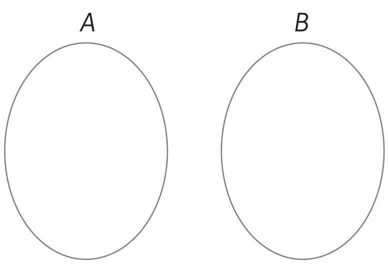
**a.**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |

- Una expresión algebraica para $f$.

______________________________

- Completa el diagrama sagital para $f$ y $f^{-1}$.




- Una expresión algebraica para $f^{-1}$.

______________________________

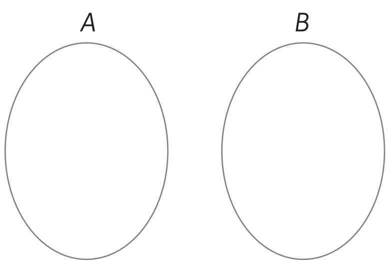
**b.**

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 7 |
| 4 | 9 |

- Una expresión algebraica para $g$.

______________________________

- Completa el sagital para $g$ y $g^{-1}$.



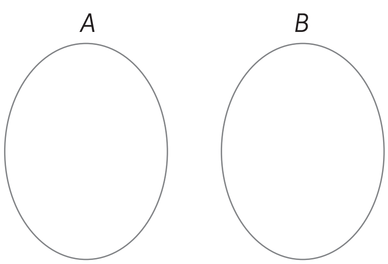

- Una expresión algebraica para $g^{-1}$.

______________________________

**5.** Completa el diagrama sagital para cada función y realiza las actividades.

**a.** $A$ = {números pares menores que 11}
$B$ = {números impares menores que 10}

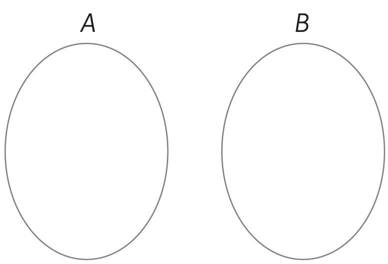
$f(x) = x - 1$




- ¿Posee función inversa? ______________
- $f^{-1}$ = ______________________________

**b.** $A$ = {números primos menores que 10}
$B$ = {números pares menores que 9}

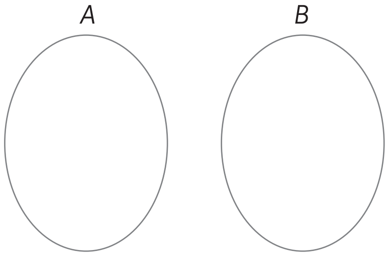
$f(x) = x$




- ¿Posee función inversa? ______________
- $f^{-1}$ = ______________________________

**c.** $A = B =$ {números naturales menores que 10}

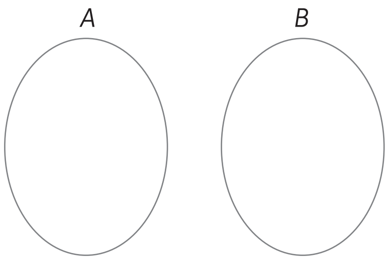
$f(x) = 2x$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**d.** $A = B =$ {números enteros mayores que $-3$ y menores que 3}

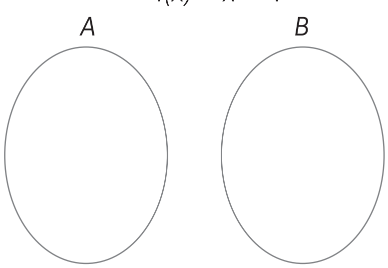
$f(x) = x - 2$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**e.** $A = B =$ {números naturales pares menores que 12}

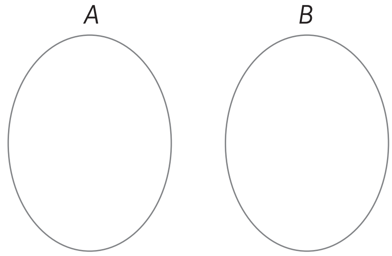
$f(x) = x + 4$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**f.** $A = B =$ {múltiplos positivos de 7 menores que 40}

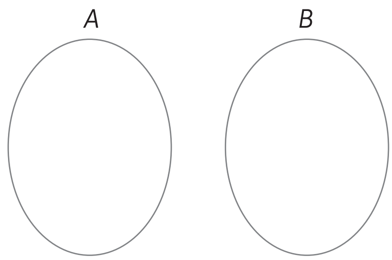
$f(x) = x + 7$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**g.** $A = B = \mathbb{Z}$

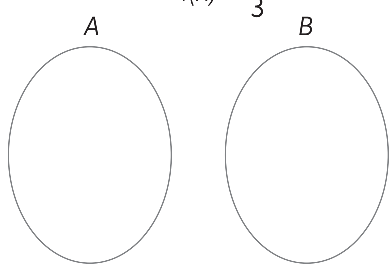
$f(x) = -x$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**h.** $A =$ {múltiplos enteros de 3}
$B = \mathbb{Z}$

$f(x) = \frac{x}{3}$




- ¿Posee función inversa? ____________
- $f^{-1} =$ ______________________

**6.** Kelvin es una escala de temperatura. El cero absoluto corresponde a los 0 K que equivalen a –273,15 °C, mientras que 1 K equivale a –272,15 °C. La función K(C) representa la temperatura en Kelvin cuando hay C grados Celsius. Determina:

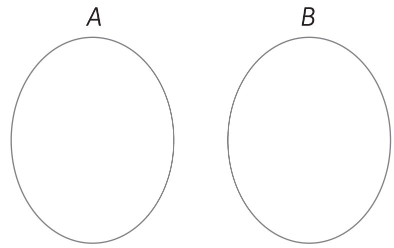
**a.** Una expresión algebraica para $K$:

______________________________

**b.** Una tabla de valores con 5 valores a elección:

| $C$ | $K(C)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**c.** Un diagrama sagital con $K$ y $K^{-1}$ con los valores de la actividad anterior:




**d.** Una expresión algebraica para $K^{-1}$:

______________________________

**e.** ¿Qué representa $K^{-1}$?.

______________________________

**7.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ Si $f(8) = 4$, entonces $f^{-1}(2) = 4$.

______________________________

**b.** ______ Si $f(x) = g^{-1}(x)$ y $g(x) = h^{-1}(x)$, entonces $f(x) = h(x)$.

______________________________

**c.** ______ Si $x \in Rec\ f$, entonces $f^{-1}(x) \in Dom\ f$.

______________________________

**d.** ______ Si $f(1) = 1$, entonces $f^{-1}(2) = 2$.

______________________________

**e.** ______ Si $f(x) = 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f$ no puede tener inversa.

______________________________

**f.** ______ Si $f^{-1}(4) = 2$, entonces $f(2) = 4$.

______________________________

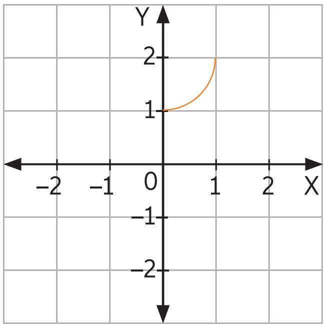
**g.** ______ Si $f^{-1}(y) = x$ entonces $f\left(f^{-1}(y)\right) = x$.

______________________________

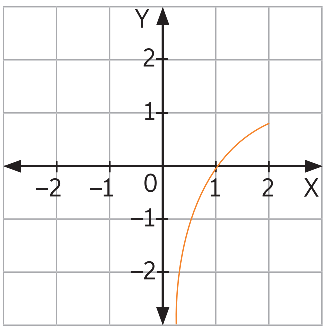
# Representación de la función inversa

**1.** ◆ Construye la gráfica de la función inversa de las siguientes funciones.

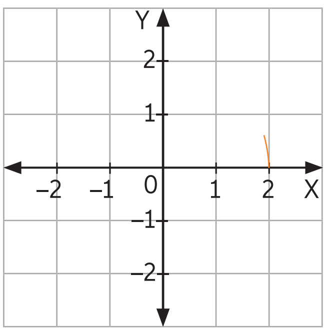
**a.**



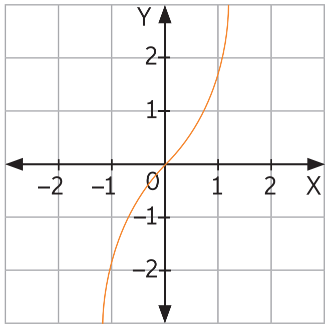

**b.**



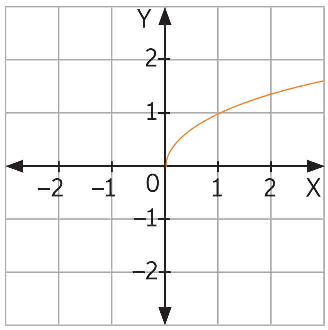

**c.**



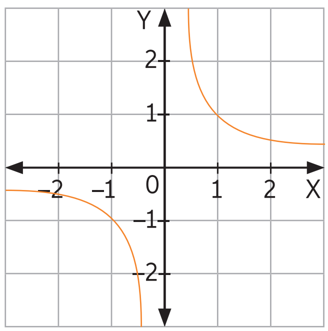

**d.**



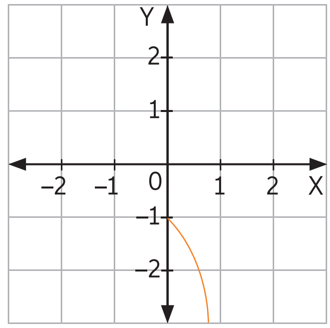

**e.**



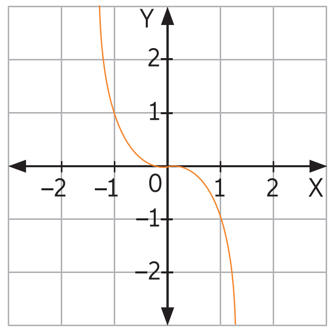

**f.**



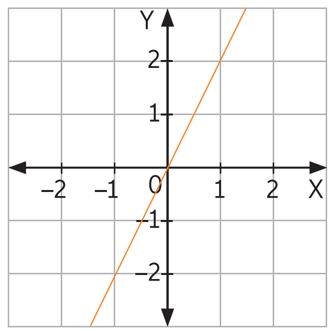

**g.**




**h.**




**i.**




**2.** Construye un diagrama sagital que represente $f^{-1}$ para cada tabla.

**a.**

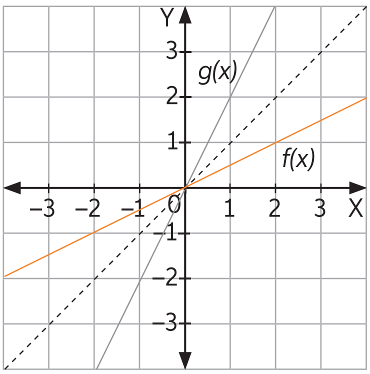
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 3 | 5 |
| 5 | 10 |

**b.**

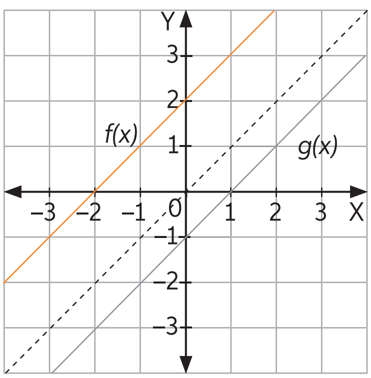
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -1 | 10 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{10}$ |
| 2 | $\frac{1}{100}$ |

**3.** ◆ Evalúa si en cada gráfico la función *g(x)* corresponde a la inversa de *f(x)*. En el caso de que no lo sean, traza la gráfica de $f^{-1}(x)$ en el mismo plano cartesiano.

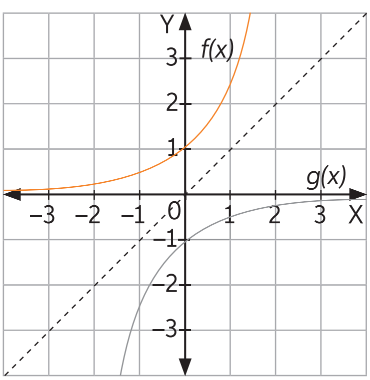
**a.** ______________________



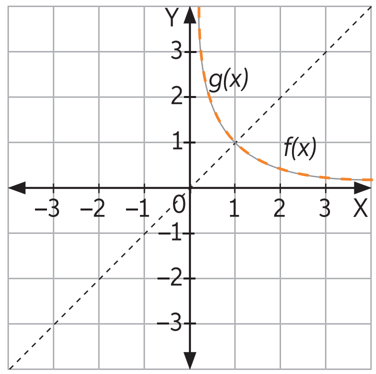

**b.** ______________________



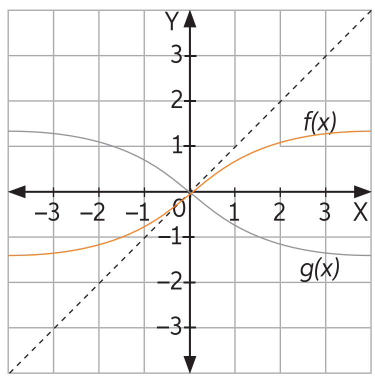

**c.** ______________________



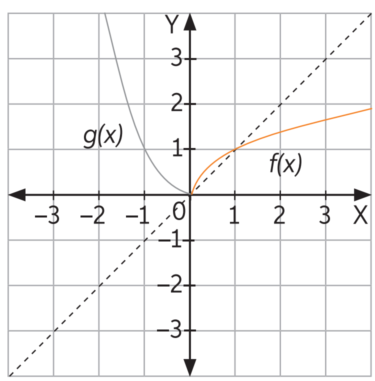

**d.** ______________________



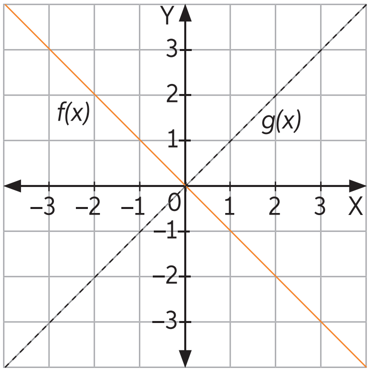

**e.** ______________________



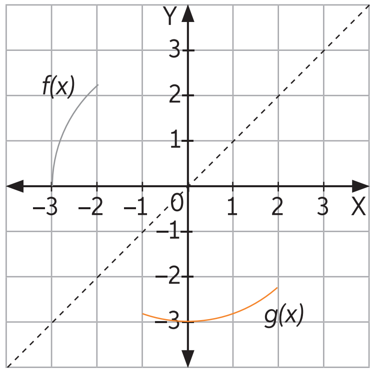

**f.** ______________________



g. ____________________

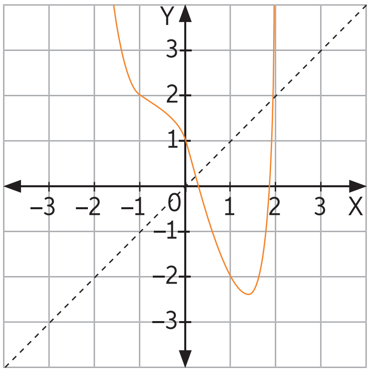



h. ____________________

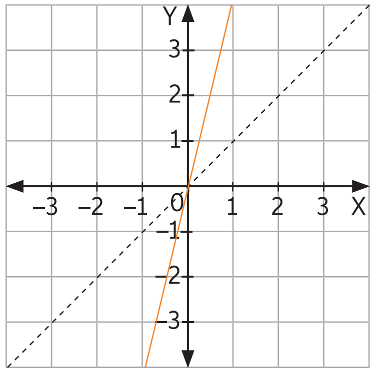



**4.** ◆ Analiza la gráfica de cada función y argumenta si existe o no su función inversa. Si tu respuesta es positiva, construye en el mismo gráfico su función inversa.

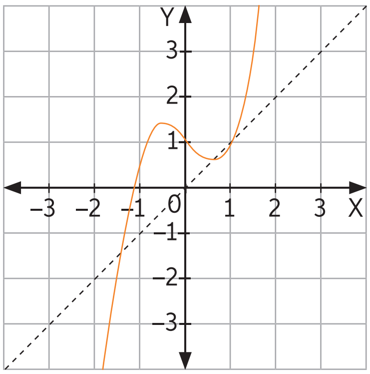
a.



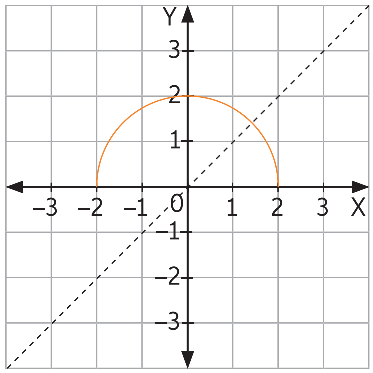

c.




b.




d.



**5.** Completa tabla de valores para $f$ a partir de la tabla de valores de $f^{-1}$.

**a.**

| $x$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |
| 3 | 16 |
| 4 | 32 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

**b.**

| $x$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 4 | 0 |
| 5 | –1 |
| 6 | –2 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

**c.**

| $x$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| 100 | 2 |
| 10 | 1 |
| 1 | 0 |
| $\frac{1}{10}$ | –1 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

**d.**

| $x$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | –1 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

**6.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ La gráfica de $f$ y su inversa siempre son simétricas con respecto al eje X.

______________________________________________

**b.** ______ Si $f(x)=-x$, entonces la gráfica de $f$ y $f^{-1}$ son la misma.

______________________________________________

**c.** ______ Si el punto $(a,b)$ se encuentra en la gráfica de $f$, entonces el punto $(-b,-a)$ se encuentra en la gráfica de $f^{-1}$.

______________________________________________

**d.** ______ Si $f(x)=x$, entonces el gráfico de $f$ y $f^{-1}$ son el mismo.

______________________________________________

**e.** ______ Si el gráfico de f es una recta paralela a la recta $y=x$, entonces el gráfico de $f^{-1}(x)$ también será una recta paralela a la recta $y=x$.

______________________________________________

**f.** ______ Si el gráfico de f es una recta perpendicular a la recta $y=x$, entonces el gráfico de $f^{-1}(x)$ será una recta paralela a la recta $y=x$.

______________________________________________

**g.** ______ Los gráficos de $f$ y $f^{-1}$ siempre son simétricos respecto a la recta $y=x$ y por tanto siempre se cortan en algún punto.

______________________________________________

# Función inversa de la función lineal y afín

**1.** Determina la función inversa de las siguientes funciones.

**a.** $f(x) = 3x$

**b.** $g(x) = \frac{1}{4}x$

**c.** $h(x) = \sqrt{7}\,x$

**d.** $p(x) = 2^{-3}x$

**e.** $q(x) = \frac{1}{4}x$

**f.** $s(x) = 2x + \frac{1}{2}x$

**g.** $t(x) = 2x - 1$

**h.** $r(x) = 4 - \frac{x}{2}$

**i.** $j(x) = 3x - \pi$

**j.** $b(x) = 10^2 + 3^{-2}x$

**k.** $k(x) = \sqrt{2}\,x$

**l.** $a(x) = x - 2^{-6}$

**2.** ◆ Determina el valor de $p$ y $q$ para que $g(x)$ sea la función inversa de $f(x)$.

**a.** $f(x) = 3x + 1$
$g(x) = px + q$

**b.** $f(x) = 2x - 2$
$g(x) = 2px - q$

**c.** $f(x) = 5x$
$g(x) = 5p - qx$

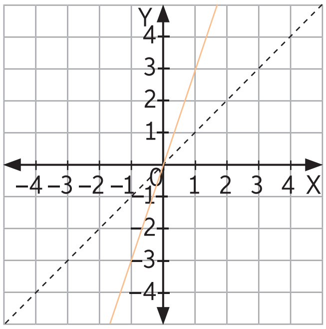
**d.** $f(x) = px$
$g(x) = q - 3x$

**e.** $f(x) = -qx$
$g(x) = p - x$

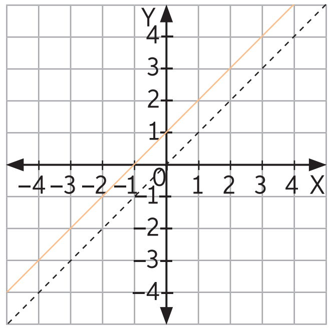
**f.** $f(x) = 3x - p$
$g(x) = qx - 3$

**3.** Determina la expresión algebraica de cada función. Luego, grafica su función inversa en el plano cartesiano. Finalmente, determina la expresión algebraica de la función inversa.

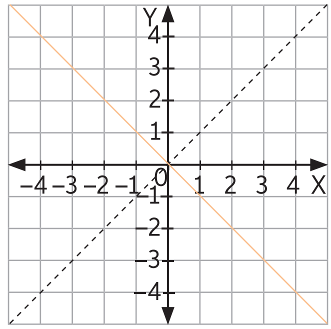
**a.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



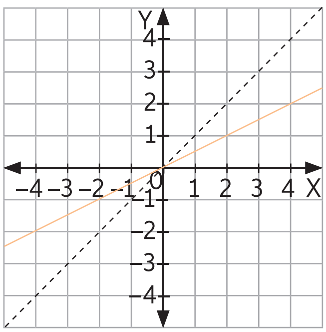
**d.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



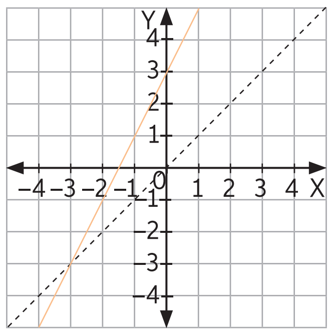
**g.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



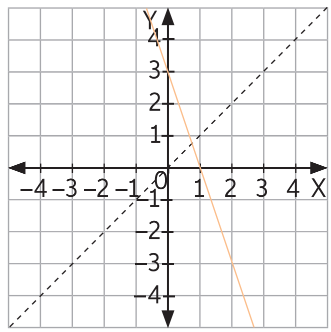
**b.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



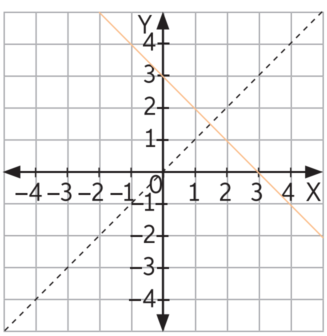
**e.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



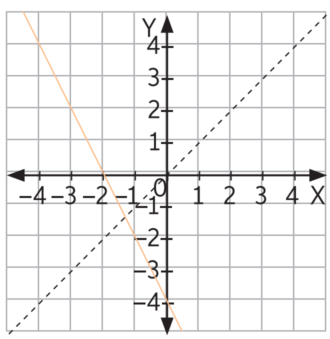
**h.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



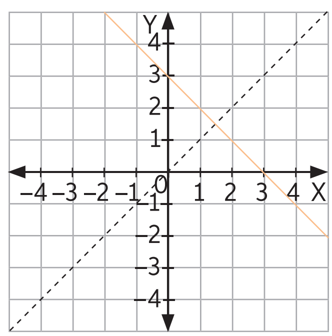
**c.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



**f.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



**i.** $f(x)=$ ____ $x +$ ____



**4.** Completa la tabla.

| Descripción de $f$ | Expresión algebraica de $f$ | Descripción de $f^{-1}$ | Expresión algebraica de $f^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| Multiplica un número por 4 | | | |
| Divide un número por 2 y le suma 1 | | | |
| | | Multiplica un número por 8 y le resta uno | |
| | $f(x) = 3x - 6$ | | |
| | | | $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$ |
| | $f(x) = \sqrt{2}\,x$ | | |
| | | Divide un número por $\pi$ y le suma 3. | |

**5.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ Si $f$ es la función inversa de $g$ y $f$ en una función lineal, entonces $g$ también será una función lineal.

______________________________________________

**b.** ______ Si $f(x) = px$, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = px$.

______________________________________________

**c.** ______ Si $f(x) = x - q$, entonces $g(x) = qx$ es su inversa.

______________________________________________

**d.** ______ Si $f(x) = px + 1$ y $g(x) = qx - 1$, es imposible que las funciones sean inversas, independiente del valor de $p$ o $q$.

______________________________________________

**e.** ______ Si $f$ es una función afín, entonces su función inversa también lo es.

______________________________________________

**f.** ______ Si una función lineal tiene pendiente negativa, entonces su inversa también tiene pendiente negativa.

______________________________________________

**6.** ◆ Si una pulgada equivale a 2,54 cm, determina la función que transforma $x$ pulgadas en cm. Luego, determina su función inversa e interpreta su significado.

# Función inversa de la función cuadrática

**1.** Determina la función inversa de las siguientes funciones cuadráticas.

a. $f(x) = 5x^2$

e. $q(x) = 2x^2$

i. $j(x) = \sqrt{3x}$

b. $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

f. $s(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^2$

j. $b(x) = \sqrt{x - 1}$

c. $h(x) = \sqrt{2}\,x^2$

g. $t(x) = \sqrt{2x}$

k. $k(x) = 3\sqrt{x}$

d. $p(x) = 5^{-7}x^2$

h. $r(x) = \sqrt{3^{-2}x}$

l. $a(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$

**2.** Determina el valor de $p$ y $q$ para que la función $g(x)$ sea inversa a $f(x)$.

a. $f(x) = 3x^2$
$g(x) = \sqrt{px}$

c. $f(x) = 2x^2 - 1$
$g(x) = \sqrt{px - q}$

e. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$
$g(x) = px^2 - q$

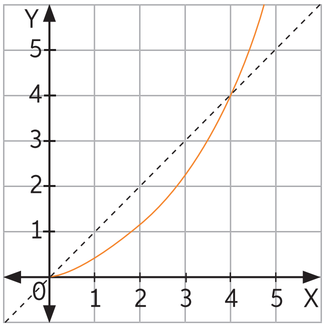
b. $f(x) = 10^2x^2$
$g(x) = \sqrt{px}$

d. $f(x) = \sqrt{x - 1}$
$g(x) = px^2 + q$

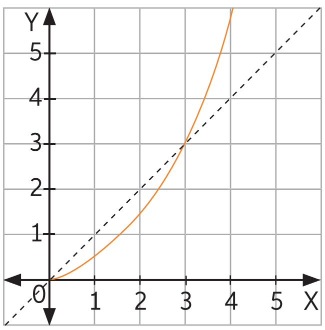
f. $f(x) = \sqrt{3x}$
$g(x) = px^2$

**3.** Determina la expresión algebraica de cada función representada. Luego, grafica su función inversa en el plano cartesiano. Finalmente, determina la expresión algebraica de esta.

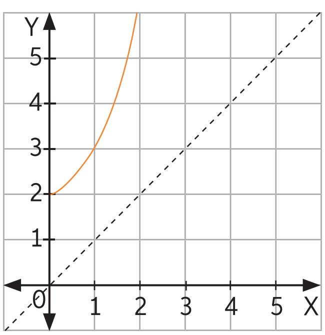
**a.** $f(x) = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_$



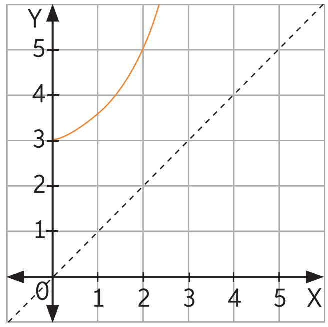

**b.** $f(x) = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_$



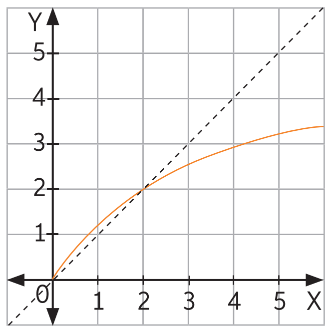

**c.** $f(x) = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_$



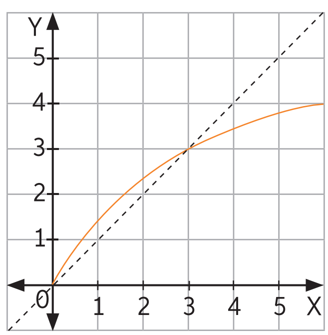

**d.** $f(x) = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_$



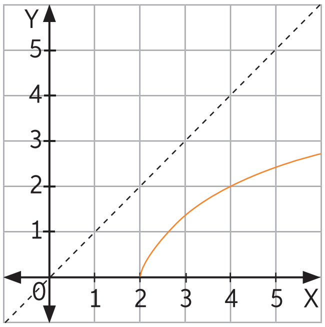

**e.** $f(x) = \sqrt{\_\_\_\_ x + \_\_\_\_}$



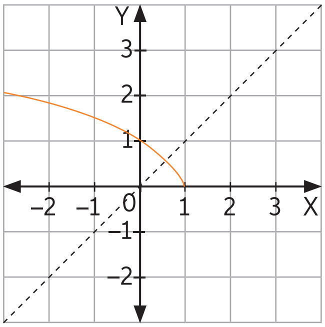

**f.** $f(x) = \sqrt{\_\_\_\_ x + \_\_\_\_}$



**g.** $f(x) = \sqrt{\_\_\_\_ x + \_\_\_\_}$




**h.** $f(x) = \sqrt{\_\_\_\_ x + \_\_\_\_}$




**4.** ◆ Analiza las funciones graficadas. Determina cuál de ellas corresponde a la función inversa de la lista. ¿Cuál de ellas no se encuentra graficada?

**a.** $f(x) = x^2$ __________

**b.** $g(x) = 4x^2$ __________

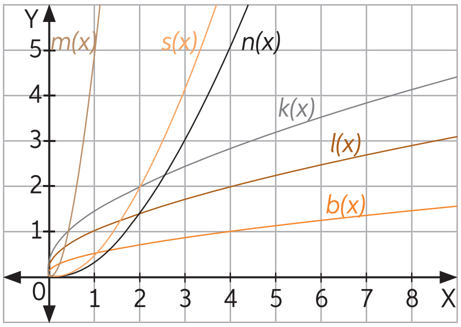
**c.** $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ __________

**d.** $t(x) = \frac{1}{3}x^2$ __________

**e.** $p(x) = \sqrt{2x}$ __________

**f.** $q(x) = \sqrt{3x}$ __________

**g.** $r(x) = \sqrt{\frac{1}{5}x}$ __________




**5.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ La función inversa de una cuadrática siempre será una función raíz cuadrada.

**b.** ______ Para definir la inversa de una función cuadrática es necesario restringir su dominio a $\mathbb{R} - \{0\}$.

**c.** ______ Si la función inversa de una función es $g(x) = \sqrt{px + q}$, entonces la función original es $f(x) = qx^2 - p$.

## Antes de continuar

Lee atentamente y marca la alternativa correcta.

**1.** Si $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 2$, ¿cuál de las siguientes funciones corresponde a $f$?

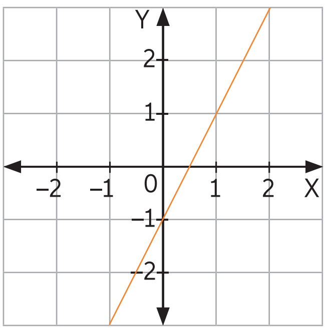
**A.** $f(x) = 4x + 2$

**B.** $f(x) = 2x - 4$

**C.** $f(x) = 4x + 8$

**D.** $f(x) = 4x - 8$

**2.** La gráfica de una función es la siguiente:




¿Cuál es su función inversa?

**A.** $f(x) = 2x - 1$

**B.** $f(x) = \frac{x}{2} - 1$

**C.** $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

**D.** $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

**3.** ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

**I.** El gráfico de una función y su inversa siempre serán simétricas con respecto a la recta $y = x$.

**II.** Si $f$ es una función lineal, $f^{-1}$ es una función afín.

**III.** Si $f$ es una función cuadrática, $f^{-1}$ es una función lineal.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**4.** Si $g$ es una función cuadrática, es correcto afirmar:

**I.** Si $g(1) = 4$, entonces $g^{-1}(4) = 1$.

**II.** Para que posea inversa es necesario restringir su dominio a $\mathbb{R}_0^+$.

**III.** Su inversa también es una función cuadrática.

**A.** Solo I.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**5.** ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

**I.** Si f(x) = x, entonces $f^{-1}(x) = f(x)$.

**II.** Si $f(x) = x^2$, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt{f(x)}$.

**III.** Si $f^{-1}(x) = ax$, entonces $f(x) = \frac{1}{a^2}f^{-1}(x)$.

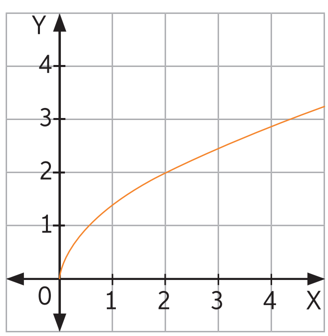
**A.** Solo I.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**6.** Si $f^{-1}$ está representada en el gráfico, ¿cuál de las siguientes funciones corresponde a $f$?




**A.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

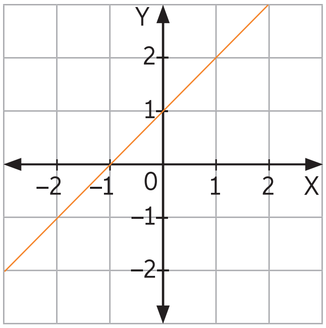
**B.** $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

**C.** $f(x) = x^2$

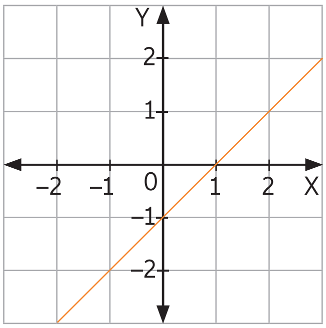
**D.** $f(x) = 4x$

**7.** Si $f(x) = x + 1$, ¿cuál de las siguientes gráficas representa $f^{-1}$?

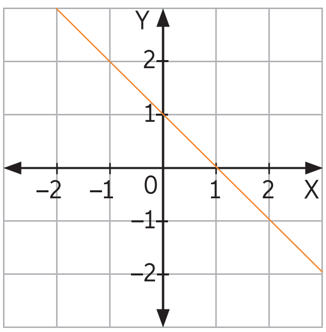
**A.**



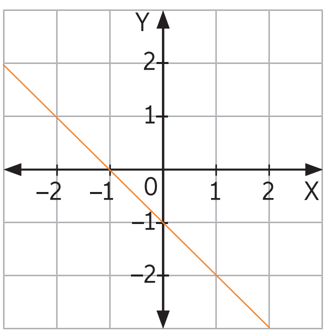

**B.**




**C.**




**D.**




**8.** Dada la tabla de valores de f, es correcto afirmar que:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 10 | 100 |

**I.** $f^{-1}(100) = 10$

**II.** $f^{-1}(3) = 9$

**III.** $f^{-1}(4) = 2$

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**9.** Si $f(x) = \frac{a}{b}x^2 - c$, ¿cuál de las siguientes funciones es su inversa?

**A.** $f(x) = \sqrt{\frac{cbx}{a}}$

**B.** $f(x) = \sqrt{c + \frac{b}{a}x}$

**C.** $f(x) = \sqrt{bc - \frac{b}{a}x}$

**D.** $f(x) = \sqrt{\frac{cb}{a} + \frac{b}{a}x}$

**10.** Si $f(x) = ax^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

**A.** $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{a}}$

**B.** $a^2x(f^{-1}(x))^2 = f(x)$

**C.** $f^{-1}(x)\sqrt{\frac{a}{x}} = f(x)$

**D.** $\sqrt{x}\ \sqrt{a}\ f^{-1}(x) = x$

**11.** Si $f(x) = 4x^2$, ¿cuál de las siguientes es su función inversa?

**A.** $f^{-1}(x) = \sqrt{4x}$

**B.** $f^{-1}(x) = 4\sqrt{x}$

**C.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

**D.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

Lección
8
# Esfera

## Definición de esfera

**1.** Describe cada uno de los siguientes conceptos asociados a una esfera. Luego, identifícalos en la esfera:

**a.** Centro:

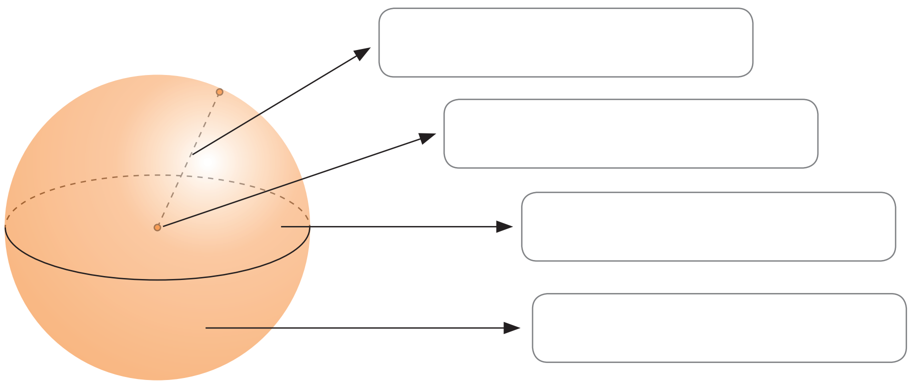
______________________________

**b.** Radio:

______________________________

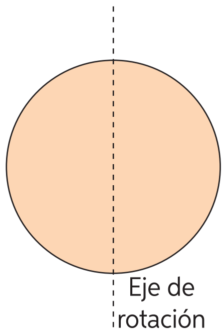
**c.** Círculo máximo:

______________________________

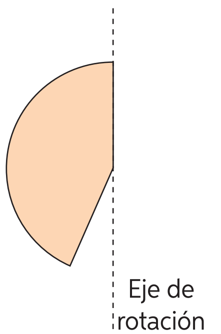


**2.** ◆ Construye el cuerpo resultante al rotar la figura con respecto al eje.

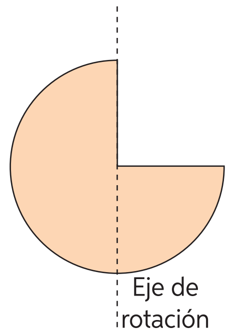
**a.**



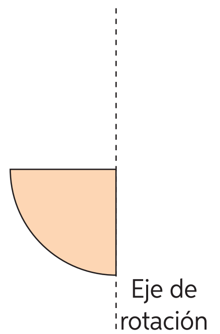

**b.**




**c.**




**d.**



**3.** Con la información proporcionada, determina la medida del radio de la esfera.

**a.** El radio de su círculo máximo corresponde a la diagonal de un cuadrado de lado 2 cm.

**b.** El radio de su círculo máximo es el doble que el de una esfera de radio 5 cm.

**c.** El área de su círculo máximo es $4\pi$ cm$^2$.

**d.** El perímetro de su círculo máximo es 9 cm.

**4.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

Para un círculo de radio r, su área A y perímetro P están dados por
$A = \pi r^2$ $P = 2\pi r$

**a.** ______ Una pelota de ping-pong se asemeja a una esfera.

**b.** ______ Si el círculo máximo de una esfera tiene perímetro $10\pi$ cm, entonces el radio de la esfera es 10 cm.

**c.** ______ Los radios de dos círculos máximos siempre son congruentes.

**d.** ______ La distancia del centro de una esfera a cualquier punto de la superficie de esférica varía dependiendo del punto.

**e.** ______ Las medidas del radio de una esfera y de su círculo máximo no siempre coinciden.

**f.** ______ Si el círculo máximo de una esfera tiene área $\frac{4}{169}\pi$ cm$^2$, entonces el radio de la esfera es $\frac{2}{169}$ cm.

**g.** ______ El círculo máximo de una esfera tiene radio r y otra esfera tiene radio *r*. Entonces ambas esferas son congruentes.

**h.** ______ Una esfera puede ser dividida en dos semiesferas.

# Volumen de la esfera

**1.** Calcula el volumen de la esfera a partir de su radio $r$ o su diámetro $d$.

**a.** $r = 4$ cm

**b.** $r = \frac{13}{2}$ cm

**c.** $r = \sqrt{3}$ m

**d.** $d = \frac{1}{2}$ cm

**e.** $d = 9$ m

**f.** $d = 12$ m

**2.** Identifica al menos tres objetos con forma esférica. Luego, investiga o estima su radio y calcula su volumen.

**a.** Objeto 1: ______________
$r$: ______________

**b.** Objeto 2: ______________
$r$: ______________

**c.** Objeto 3: ______________
$r$: ______________

**3.** Determina el radio de la esfera sabiendo su volumen V. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

**a.** $V = \frac{4}{3}$ cm$^3$

**b.** $V = \frac{3}{4}$ mm$^3$

**c.** $V = \frac{8}{3}$ cm$^3$

**d.** $V = 4{,}18\overline{6}$ m$^3$

**e.** $V = 216$ cm$^3$

**f.** $V = 12{,}56$ m$^3$

**4.** ◆ Determina el volumen de cada figura.

a. Semiesfera de radio 5 cm.

b. Semiesfera cuyo círculo máximo tiene un área de $2\pi cm^2$.

c. Un cuarto de esfera cuyo círculo máximo se encuentra inscrito en un cuadrado de lado 1 cm.

d. Esfera cuyo círculo máximo tiene un perímetro de $13\pi$ cm.

e. Semiesfera de diámetro 9 m.

f. Esfera cuyo círculo máximo tiene un radio de 3 cm.

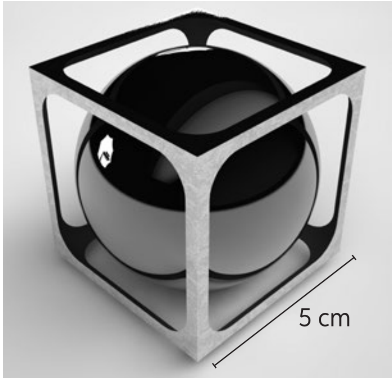
g. Semiesfera cuyo círculo máximo tiene área igual a la de un cuadrado de lado $\pi$.

h. Dos esferas cuyos círculos máximos tienen radios en razón 1: 2 y cubren un área total de $20\pi$ cm$^2$.

**5.** ◆ Resuelve los siguientes problemas. Considera $\pi \approx 3,14$.

a. Las esferas de piedra de Costa Rica son esculturas creadas por las culturas precolombinas en la región de Palmar y son consideradas como patrimonio de la humanidad. ¿Cuál es el volumen de la esfera de la imagen según el diámetro indicado?

**b.** Una esfera se encuentra inscrita en un cubo, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el volumen de la esfera?




**c.** Una esfera se inscribe en un cubo cuyo volumen es 1331 $cm^3$. ¿Cuál es su volumen de esta?

**d.** Una esfera se inscribe en un cubo cuya área total es 12 $cm^2$. ¿Cuál es su volumen?

**e.** Un cilindro de radio 4 cm tiene el doble de altura. ¿Cuál es el volumen del cono y de la esfera inscritos en el cilindro?

**f.** El volumen de una esfera es $288\pi$ $cm^3$. ¿Cuál es el área de su círculo máximo?

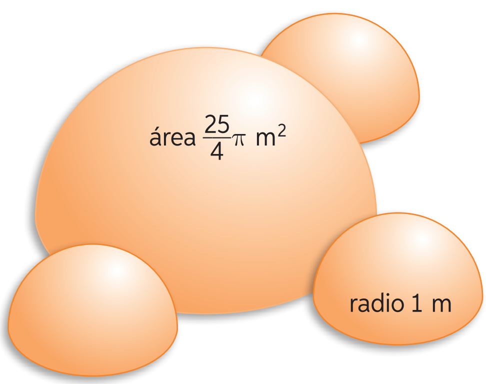
**g.** El volumen de una semiesfera es $972\pi$ $cm^3$. ¿Cuál es el perímetro de su círculo máximo?

h. ◆ **Desafío.** Una pelota saltarina tiene un diámetro de 12 cm.¿Cuántos $cm^3$ de aire se necesitan para llenarla? Considera $\pi \approx 3$.

i. Observa el diámetro de la bolita de vidrio. Si se dispone de 350 centímetros cúbicos de vidrio, ¿cuántas bolitas se pueden fabricar aproximadamente? Considera $\pi \approx 3$.


j. Una escultura de arcilla se compone de 4 semiesferas, como se muestra en la imagen. El radio de las tres más pequeñas mide 1 metro. Además, la más grande cubre un área (de suelo) de $\frac{25}{4}\pi$ metros cuadrados.

- ¿Cuál es el área (de suelo) que cubre cada una de las tres semiesferas pequeñas?




- ¿Cuál es el radio de la esfera grande?

- Se sabe que la escultura es completamente sólida. ¿Cuántos metros cúbicos de arcilla se necesitaron para construirla?

**Para comprobar**
gbit.cl/C21M2MP097A

# Área de la superficie de la esfera

**1.** Calcula el área de la superficie de la esfera dado el radio.

**a.** $r = 1$ cm

**b.** $r = 9$ mm

**c.** $r = 4$ km

**d.** $r = 11,\overline{3}$ cm

**e.** $r = \frac{5}{2}$ m

**f.** $r = \sqrt{2}$ cm

**g.** $r = \sqrt{5}$ dm

**h.** $r = 2\sqrt{6}$ m

**i.** $r = 3\sqrt{3}$ m

**2.** En cada caso, calcula el área de la superficie de la esfera.

**a.** El área basal de una semiesfera es $2\pi$ cm$^2$.

**b.** El radio del círculo máximo de una esfera es 1,5 cm.

**c.** El área del círculo máximo de una esfera es $5\pi$ cm$^2$.

**d.** El círculo máximo se encuentra inscrito en un cuadrado de lado 1 u.

**e.** El perímetro del círculo máximo es $\pi$ cm.

**f.** El volumen de la esfera es $\pi$ dm$^3$.

**g.** El volumen de la semiesfera es 1 mm$^3$.

**h.** El área total de la semiesfera es $3\pi$ cm$^2$.

**3.** Calcula el radio de la esfera dada el área de su superficie. Considera $\pi \approx 3,14$.

a. $A = 113,04\ cm^2$

b. $A = 37,68\ m^2$

c. $A = \pi\ mm^2$

d. $A = \frac{4}{3}\pi\ dm^2$

e. $A = 25371,2\ m^2$

f. $A = 12,56\ cm^2$

**4.** ◆ Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ Una semiesfera de radio $r$ tiene un área basal de a $\pi r^2$.

b. ______ El área total de una semiesfera corresponde a la mitad del área de la superficie de la esfera completa.

c. ______ Si el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi\ cm^3$, entonces el área de su superficie será $4\pi\ cm^2$.

d. ______ Si el radio de una esfera se duplica, entonces el área de su superficie de cuadruplica.

e. ______ Si el radio de una esfera disminuye a la mitad, entonces el área de su superficie también disminuye a la mitad.

f. ______ Si el área de un círculo máximo es $A$, entonces el área de su superficie esférica es $4A$.

g. ______ Si el radio de una esfera es 3 cm, entonces su volumen y área de la superficie son de igual magnitud numérica.

5. ◆ Si $V$ es el volumen de una esfera, determina:

a. El radio de la esfera en términos de V.

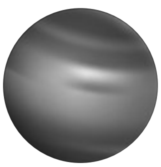
b. El área de la superficie de la esfera. Usa la respuesta anterior.

c. Calcula el radio y el área de la superficie esférica de las siguientes esferas a partir de las expresiones anteriores:

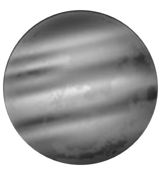
- $V = 1\ \text{cm}^3$
- $V = \pi\ \text{cm}^3$
- $V = 2021\ \text{cm}^3$

6. ◆ **Desafío.** En parejas, calculen la área de la superficie aproximada de los siguientes planetas:

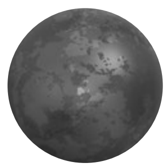
a. Neptuno: $V = \frac{4}{3} \cdot 24\,622^2 \pi\ \text{km}^3$



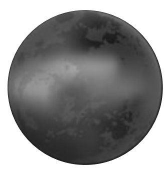
b. Jupiter: $V = 4{,}556107007 \cdot 10^{14} \pi\ \text{km}^3$



c. Venus: $A_{\text{círculo máximo}} = 36\,624\,283{,}24\pi\ \text{km}^2$



d. Marte: $P_{\text{círculo máximo}} = 6779\pi\ \text{km}$



7. ◆ Un domo es una estructura cuya forma es muy similar al casco de una semiesfera. Se construirá un domo cuya distancia desde el centro hasta el punto más alto es 11 m.

a. ¿Qué área tendrá la cubierta del domo?

**Para comprobar**
gbit.cl/C21M2MP100A

**b.** ¿Cuál es el área del suelo que cubrirá el domo?

**c.** El 15 % del suelo será alfombrado y lo restante será de madera. ¿Cuánto medirá el área cubierta por madera?

**d.** Si el domo se encuentra completamente vacío, ¿cuánto volumen de abarca?

**e.** Se dispone de 1500 $m^2$ de material para cubrir un nuevo domo. ¿Cuál es el radio máximo que podría tener este?

**f.** Calcula área de la superficie y el volumen de aire que albergarían los siguientes domos:

- Un domo de radio 5 metros.

$A =$ ______ $V =$ ______

- Dos domos de radio 4 metros cada uno.

$A =$ ______ $V =$ ______

- Tres domos de radio 3 m cada uno.

$A =$ ______ $V =$ ______

## Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

**1.** ¿Cuál de los siguientes elementos tiene relación con la esfera?

**I.** Centro

**II.** Radio

**III.** Círculo máximo

**A.** Solo I.

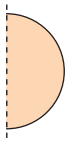
**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

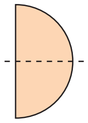
**D.** I, II y III.

**2.** En cada una de las siguientes figuras la línea punteada representa un eje de rotación. ¿En qué casos el cuerpo resultante es una esfera?

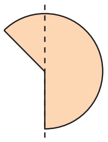
**I.**



**II.**



**III.**



**A.** Solo I.

**B.** Solo I y II.

**C.** Solo I y III.

**D.** I, II y III.

**3.** Si el radio de una esfera mide 3 cm,es correcto afirmar:

**I.** Su volumen es $4\pi\ \text{cm}^3$.

**II.** Su área es $4\pi\ \text{cm}^2$.

**III.** El área de su círculo máximo es $9\pi\ \text{cm}^2$.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo III.

**D.** Solo I y III.

**4.** El área del círculo máximo de una esfera es $16\pi\ \text{cm}^2$. ¿Cuál es el área de su superficie?

**A.** $64\pi\ \text{cm}^2$

**B.** $16\pi\ \text{cm}^2$

**C.** $\frac{16}{3}\pi\ \text{cm}^2$

**D.** $\frac{64}{3}\pi\ \text{cm}^2$

**5.** El perímetro del círculo máximo de una esfera mide $4\pi$ cm. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

**A.** $8\pi\ \text{cm}^3$

**B.** $\frac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3$

**C.** $16\pi\ \text{cm}^3$

**D.** $\frac{16}{3}\pi\ \text{cm}^3$

**6.** El área del círculo máximo de una esfera es $144\pi\ \text{cm}^2$. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

**A.** $2304\pi\ \text{cm}^3$

**B.** $1304\pi\ \text{cm}^3$

**C.** $144\pi\ \text{cm}^3$

**D.** $48\pi\ \text{cm}^3$

**7.** En una caja cúbica hay una esfera que calza perfectamente. Si el volumen de la esfera es $288\pi\ \text{cm}^3$, ¿cuál es la medida de la arista del cubo?

**A.** 6 cm

**B.** 12 cm

**C.** $6\sqrt{2}$ cm

**D.** $12\sqrt{2}$ cm

**8.** Un semicírculo de radio 30 cm se rota en torno a su diámetro formando una esfera. Es correcto afirmar:

I. El radio de la esfera también es 30 cm.

II. El área de la superficie esférica es $120\pi$ cm$^2$.

III. El volumen de la esfera es $120\pi$ cm$^3$.

A. Solo I.

B. Solo II.

C. Solo I y II.

D. Solo I y III.

Responde las preguntas 9, 10 y 11 a partir de la siguiente situación.

Una tienda de artículos deportivos vende packs de tres pelotas de tenis en recipientes cilíndricos como el de la imagen. El radio de una pelota de tenis varía aproximadamente entre 33 mm y 35 mm.

**9.** ¿Cuánto mide la superficie de las tres pelotas de tenis?

A. Entre $1089\pi$ y $1225\pi$ mm$^2$.

B. Entre $4356\pi$ y $4900\pi$ mm$^2$.

C. Entre $13\,068\pi$ y $14\,700\pi$ mm$^2$.

D. Entre $47916\pi$ y $57166,\overline{6}\pi$ mm$^2$.

**10.** ¿Cuánto volumen ocupan las pelotas?

A. Entre $4356\pi$ y $4900\pi$ mm$^3$.

B. Entre $13\,068\pi$ y $14\,700\pi$ mm$^3$.

C. Entre $47916\pi$ y $57166,\overline{6}\pi$ mm$^3$.

D. Entre $143\,748\pi$ y $171\,500\pi$ mm$^3$.

**11.** El radio de las pelotas es exactamente igual al radio del cilindro que las contiene. Además, la altura del envase coincide con el de las tres pelotas apiladas. ¿Cuál es el volumen de aire que queda entre las pelotas y el recipiente cilíndrico?

A. $\frac{1}{6}$ del volumen total del envase.

B. $\frac{1}{2}$ del volumen total del envase.

C. $\frac{1}{3}$ del volumen total del envase.

D. $\frac{1}{8}$ del volumen total del envase.

**12.** El radio de una pelota de ping-pong mide 20 mm. ¿Cuánta área de material se necesita para elaborar una unidad?

A. $400\pi$ mm$^2$

B. $1600\pi$ mm$^2$

C. $\frac{1600}{3}\pi$ mm$^2$

D. $\frac{32000}{3}\pi$ mm$^2$

**13.** El volumen de una esfera es $972\pi$ cm$^3$. ¿Cuál es el área de su superficie?

A. $108\pi$ cm$^2$

B. $\sqrt{243}\,\pi$ cm$^2$

C. $324\pi$ cm$^2$

D. $2916\pi$ cm$^2$

**14.** El área de la superficie de una esfera es $324\pi$ cm$^2$. ¿Cuánto mide el radio de su círculo máximo?

A. 3 cm

B. 9 cm

C. 27 cm

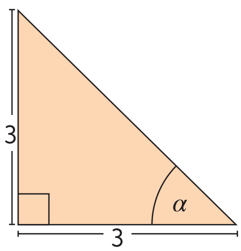
D. 81 cm

# Razones trigonométricas

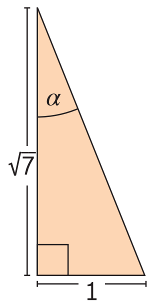
## Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

**1.** Determina el valor del lado faltante usando el teorema de Pitágoras.

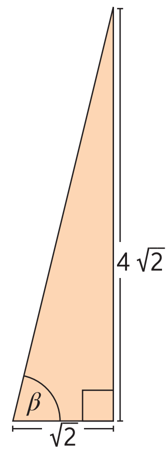
**a.**



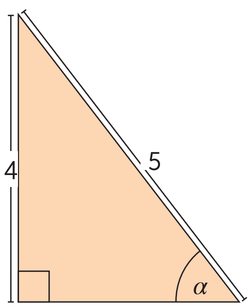

**c.**



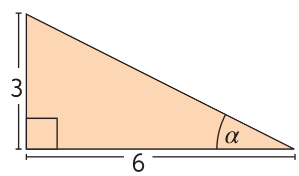

**e.**



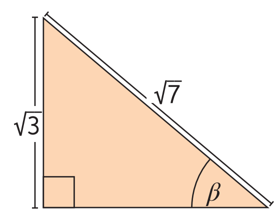

**b.**




**d.**




**f.**




**2.** A partir de los triángulos anteriores, completa la tabla con las razones trigonométricas.

| Razón trigonométrica | Triángulo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | c | d | e | f |
| sen($\alpha$) | | | | | | |
| cos($\alpha$) | | | | | | |
| tan($\alpha$) | | | | | | |

**3.** ◆ Analiza los siguientes valores. Luego, responde.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$ | $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ |

**a.** ¿Qué relación observas entre el seno y el coseno de los ángulos?

______________________________

**b.** ¿Qué relación tienen los ángulos de 30° y 60°?

______________________________

**4.** ◆ Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ cos45° y sen45° son siempre iguales.

______________________________

**b.** ______ $\cos 30° = \frac{1}{2}$.

______________________________

**c.** ______ Si los catetos de un triángulo rectángulo son congruentes y $\alpha$ es cualquiera de sus ángulos interiores no recto, entonces $\cos\alpha = \text{sen}\alpha$.

______________________________

**d.** ______ Si $\tan\beta = \frac{3}{4}$, entonces $\cos\beta = \frac{5}{4}$.

______________________________

**e.** ______ Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta + \alpha = 90°$, entonces $\cos\beta = 2$.

______________________________

**f.** ______ Si dos triángulos rectángulos son congruentes, entonces sus razones trigonométricas son iguales.

______________________________

**g.** ______ Se asume que $\alpha$ es el ángulo determinado por dos catetos de medidas 3 y 4. Además, $\beta$ está determinado por dos catetos de medidas 9 y 12. Entonces $\cos\alpha = \cos\beta$.

______________________________

**h.** ______ Si $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces necesariamente $\alpha = 30°$.

______________________________

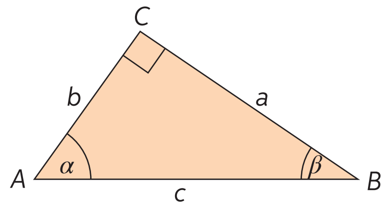
**i.** ______ Si $\text{sen}\alpha = \frac{A}{B}$, entonces $\cos\alpha = \frac{B}{A}$.

______________________________

**j.** ______ Si $\text{sen}45° + \cos45° + \tan45° = 2$.

______________________________

**5.** Determina los datos faltantes de cada triángulo a partir de la imagen y de la información dada.




**a.** $\alpha = 30°$, $b = 5$ cm

- $a =$ ____________
- $c =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**b.** $\beta = 45°$, $c = \sqrt{6}$ cm

- $a =$ ____________
- $b =$ ____________
- $\alpha =$ ____________

**c.** $\alpha = 60°$, $a = 1$ cm

- $b =$ ____________
- $c =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**d.** $\alpha = \beta$, $a = 2$ cm

- $b =$ ____________
- $c =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**e.** $a = b = \sqrt{3}$

- $c =$ ____________
- $\alpha =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**f.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $c = 5$ cm

- $a =$ ____________
- $b =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**g.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$, $b = 1$ cm

- $a =$ ____________
- $c =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**h.** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 10$ cm

- $b =$ ____________
- $c =$ ____________
- $\beta =$ ____________

**i.** $\tan\beta = 1$, $c = 1$ cm

- $a =$ ____________
- $b =$ ____________
- $\alpha =$ ____________

**6.** Calcula cada una de las siguientes expresiones.

**a.** $\tan 60° + \frac{3}{\cos 30°}$

**b.** $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{3}\operatorname{sen} 60°$

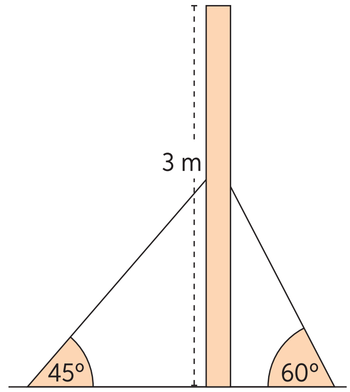
**c.** $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\cos 45° + \cos 60°$

**d.** $\operatorname{sen} 45° + \cos 45° - \sqrt{2}$

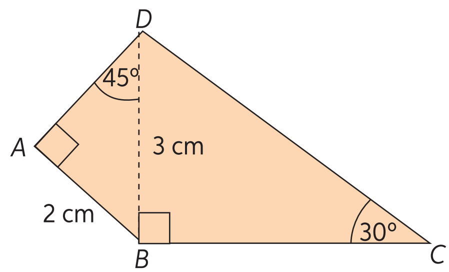
# Aplicaciones de las razones trigonométricas

**1.** ◆ Resuelve los siguientes problemas usando razones trigonométricas.

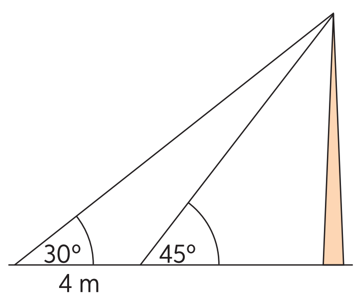
**a.** Para reforzar un pilar perpendicular al suelo de 3 m de altura, se necesita adherir unas vigas metálicas desde la mitad de este al suelo. Por espacio, las vigas deben formar ángulos de elevación como muestra la figura. ¿Qué longitud debe tener cada viga?



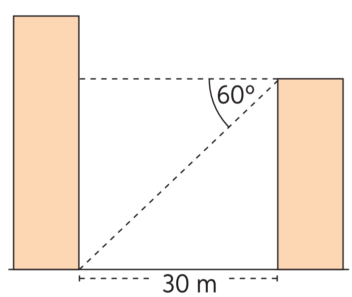

**b.** ¿Cuál es el área y el perímetro del cuadrilátero?



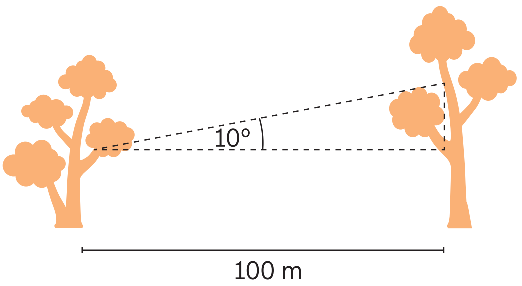

**c.** Desde cierto punto una hormiga observa la cima de una torre perpendicular al piso con un ángulo de elevación de 30°. Luego, se acerca 4 metros a la torre y observa su cima con un ángulo de elevación de 45°. Despreciando la altura del observador, ¿cuánto mide la torre aproximadamente?



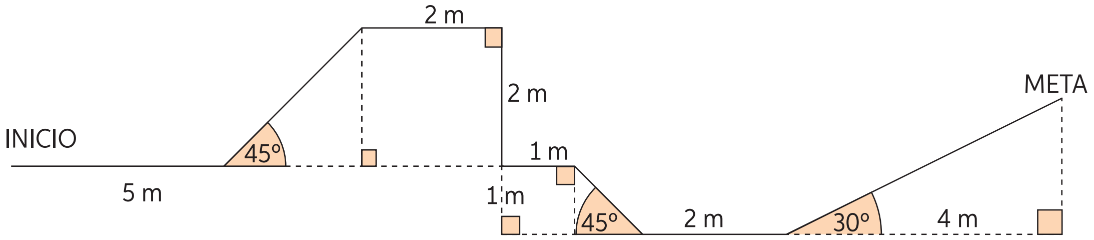

**d.** De la azotea de un edificio se observa la base de un edificio vecino con un ángulo de depresión de 60°. La distancia entre las bases de los edificios es 30 m. Entonces, ¿cuál es la altura del edificio desde donde se está observando?

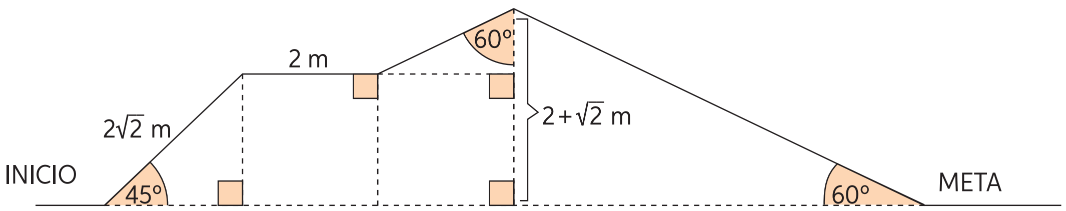


**e.** Para realizar canopy, se tensa una cuerda de acero con un ángulo de elevación de 10°. ¿Cuál es el largo de la cuerda?




**f.** Para una competencia de resistencia física se realiza una serie de circuitos. Estos implican correr a lo largo de diferentes pendientes, muros, etc. Calcula la distancia total de cada circuito identificando los triángulos rectángulos que lo componen. Las medidas se encuentran en metros.

- 


- 

**2.** ◆ Para los siguientes problemas, construye un bosquejo de la situación. Luego, resuelve. Si es necesario, usa la calculadora.

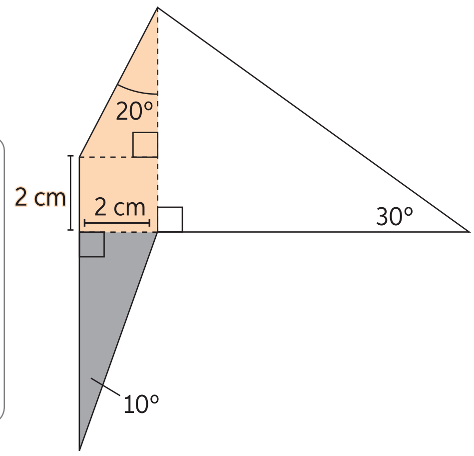
**a.** Un triángulo rectángulo tiene como ángulo interior 30°. Si el cateto opuesto a ese ángulo mide 15 cm, ¿cuánto mide el otro cateto? ¿Cuál es la medida de su hipotenusa?

**b.** Desde lo alto de un poste se encuentra una cuerda amarrada al piso con un ángulo de depresión de 60°. El alto del poste es 6 metros. Entonces, ¿cuál es el largo de la cuerda?

**c.** Desde la copa de un árbol se encuentran atadas dos cuerdas bien tensadas al piso. Estas forman un ángulo de depresión de 65° y de 75°. Además, se sabe que la altura del árbol es 10 metros. ¿A qué distancia en el piso se encuentran los extremos de las cuerdas?

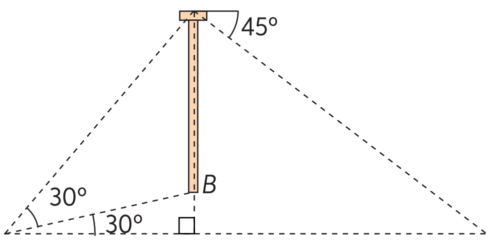
**d.** Dos casas se encuentran distanciadas 10 metros una de otra. Si se observa los puntos más altos de estas desde una distancia intermedia, los ángulos de elevaciones son 30° a la primera (*A*) y 35° a la segunda casa (*B*). ¿Cuáles son sus alturas?

**3.** ◆ A partir de un cuadrado de lado 2 cm, se superponen tres triángulos rectángulos como en la figura. Calcula el área y el perímetro totales de la figura.




**4.** ◆ Desde un punto *P*, una persona observa la cima de una torre perpendicular al suelo con un ángulo de elevación de 30°. Se sabe, además, que la persona está a una distancia de 15 metros de la base de la torre (*B*) . Desde la cima de la torre, otra persona observa con un ángulo de depresión de 45° unos animales salvajes que se encuentran en un punto *Q*.

**a.** Completa la figura, identificando los puntos *P* y *Q*, además de las distancias entregadas.



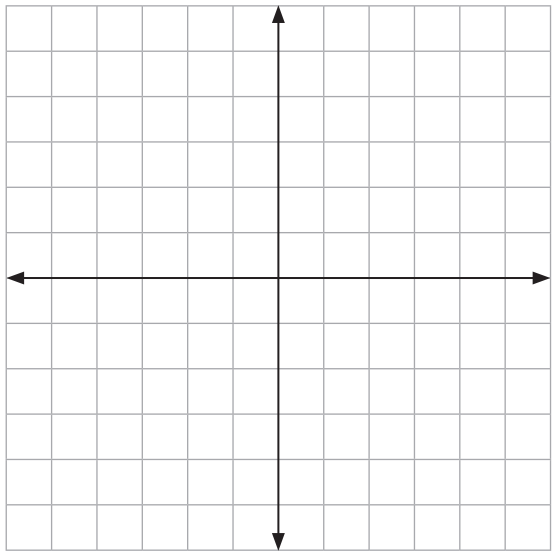

**b.** ¿Cuál es la altura de la torre?

**c.** ¿A qué distancia de la persona sobre la torre se observan los animales salvajes?

**d.** ¿Cuál es la distancia entre el observador en *P* y los animales en *Q*?

# Vectores y trigonometría

**1.** Representa cada vector en el plano cartesiano. Luego, determina las componentes horizontal y vertical. Finalmente, escribe el vector en coordenadas cartesianas a partir de la información dada.



**a.** $|\vec{v}| = 3$, $\alpha = 30°$, primer cuadrante

$\vec{v}_x$: ________ $\vec{v}_y$: ________

$\vec{v} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**b.** $|\vec{u}| = 2$, $\alpha = 60°$, primer cuadrante

$\vec{u}_x$: ________ $\vec{u}_y$: ________

$\vec{u} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**c.** $|\vec{w}| = 1$, $\alpha = 30°$, segundo cuadrante.

$\vec{w}_x$: ________ $\vec{w}_y$: ________

$\vec{w} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**d.** $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, tercer cuadrante.

$\vec{p}_x$: ________ $\vec{p}_y$: ________

$\vec{p} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**e.** $|q| = 1$, $\alpha = 60°$, cuarto cuadrante.

$\vec{q}_x$: ________ $\vec{q}_y$ ________

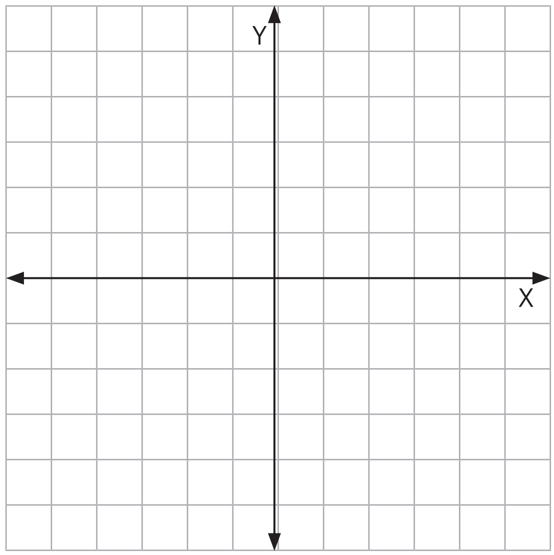
$\vec{q} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**f.** $|\vec{r}| = 1$, $\alpha = 30°$, segundo cuadrante.

$\vec{r}_x$: ________ $\vec{r}_y$: ________

$\vec{r} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$

**2.** Grafica los vectores en el plano. Luego, determina sus proyecciones, su módulo y el ángulo que forma con el eje horizontal con ayuda de una calculadora.




**a.** $\vec{v} = (1, 2)$

$\vec{v}_x$: ______ $\vec{v}_y$: ______

$|\vec{v}|$: ______________

$\alpha$: ______________

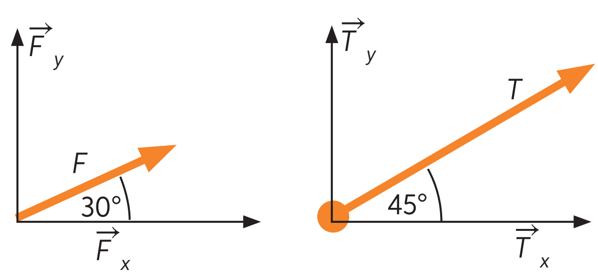
**b.** $\vec{u} = (3, -1)$

$\vec{u}_x$: ______ $\vec{u}_y$: ______

$|\vec{u}|$: ______________

$\alpha$: ______________

**3.** ◆ Una caja es arrastrada por una cuerda que genera una tensión $\vec{T}$ cuyo módulo es 30 N con un ángulo de elevación de 45°. Además, una persona empuja la caja con una fuerza $\vec{F}$ con módulo 20 N y con un ángulo de elevación de 30°. Lo anterior se ilustra en la figura.



a. Determina cada vector:

- $\vec{T}_x$:
- $\vec{T}_y$:
- $\vec{F}_x$:
- $\vec{F}_y$:

b. Calcula la suma de todas las fuerzas horizontales y verticales.

- Horizontal: ____________________
- Vertical: ____________________

4. ◆ Resuelve los siguientes problemas:

a. Un ciclista se lanza por una rampla cuya elevación es de 45° con una rapidez de 20 m/s. ¿Cuál es su vector velocidad?

b. Un patinador profesional se lanza por una rampla con vector velocidad $\vec{v} = (6, 3)$. ¿Con qué rapidez se lanza? ¿Con qué ángulo de elevación?

c. Un objeto se lanza con un ángulo de elevación de 45° con una velocidad de $\vec{v} = (x, 2)$. ¿Con qué rapidez se lanza?

d. Un objeto se lanza con un ángulo de elevación $\gamma$ con una velocidad $\vec{v} = (3, y)$. ¿Cuál debe ser rapidez para que el ángulo $\gamma$ sea 60°?

# Antes de continuar

Lee atentamente y marca la alternativa correcta.

**1.** Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\alpha$ es:

A. 15°

B. 30°

C. 45°

D. 60°

**2.** ¿Para qué valor de $\beta$, las expresiones $\text{sen}\beta$ y $\cos\beta$ son iguales?

I. 30°

II. 45°

III. 60°

A. Solo I.

B. Solo II.

C. Solo I y II.

D. Solo II y III.

**3.** Si $\text{sen}\alpha = \frac{5}{7}$ y el cateto opuesto a $\alpha$ mide 20 cm, ¿cuánto mide el cateto adyacente?

A. 7

B. 20

C. 28

D. $\sqrt{384}$

**4.** Si $\tan\theta = \frac{3}{4}$, entonces $\cos\theta$ es:

A. $\frac{4}{3}$

B. 5

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

**5.** La expresión $\tan 60° + 2\cos 30°$ es igual a:

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

**6.** Considera un triángulo rectángulo isósceles cuyo ángulo interior distinto de 90° es $\alpha$. Es correcto afirmar:

I. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

II. $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$

III. $\alpha = 45°$

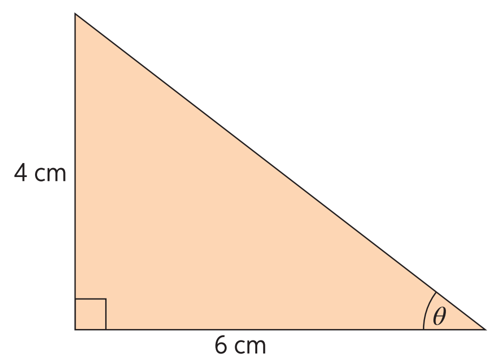
A. Solo I.

B. Solo III.

C. Solo I y II.

D. Solo I y III.

**7.** Considera el siguiente triángulo rectángulo:




Es correcto afirmar:

I. $\cos\theta = 6$

II. $\text{sen}\theta = 4$

III. $\tan\theta = \frac{2}{3}$

A. Solo I.

B. Solo II.

C. Solo III.

D. I, II y III.

**8.** Si $\tan\theta = \sqrt{3}$, entonces $\theta$ es:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

**9.** Desde un punto *P*, un niño mira la cima de una torre con un ángulo de elevación de 60°. La distancia desde *P* a la base de la torre es 22 m y el niño mide aproximadamente un metro. ¿Cuál es la altura de la torre aproximadamente?

**A.** $22\sqrt{3}$ m

**B.** $22\sqrt{3} + 1$ m

**C.** $11\sqrt{3}$ m

**D.** $11\sqrt{3} + 1$ m

**10.** Un vector en el primer cuadrante forma un ángulo de 30° con el eje *X* y su módulo es 20. ¿Cuáles son las coordenadas del vector?

**A.** $(10\sqrt{3}, 10)$

**B.** $(20\sqrt{3}, 20)$

**C.** $(10, 10\sqrt{3})$

**D.** $(20, 20\sqrt{3})$

**11.** Dado el vector $\vec{v} = (-3, 4)$, es correcto afirmar:

**I.** El vector se encuentra en el tercer cuadrante.

**II.** Su módulo es 5.

**III.** El ángulo que forma con el eje X es 30°.

**A.** Solo I.

**B.** Solo II.

**C.** Solo I y II.

**D.** I, II y III.

**12.** Las proyecciones $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ de un vector en el primer cuadrante son iguales en módulo. ¿Qué ángulo forma el vector con el eje X?

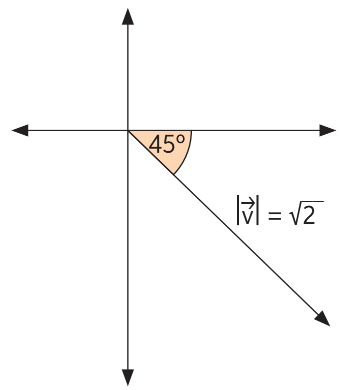
**A.** 0°

**B.** 30°

**C.** 45°

**D.** 60°

**13.** Considera el vector $\vec{v}$.




¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{v}$?

**A.** $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**B.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

**C.** $(1, -1)$

**D.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**14.** Una cuerda se encuentra atada de un extremo *A* al suelo y del otro extremo *B* a una muralla. El ángulo de elevación que forma la cuerda con respecto al suelo es 30°. Se puede conocer el largo de la cuerda si:

**I.** La distancia del extremo *A* a la muralla es 2 m.

**II.** La distancia del extremo *B* al suelo es 6 m.

**A.** (II) depende de (I).

**B.** Ambas juntas, (I) y (II).

**C.** Cada una por sí sola, (I) o (II).

**D.** Se requiere información adicional.

**15.** Se puede conocer las coordenadas de un vector en el primer cuadrante si se conoce:

**I.** El ángulo que forma con el eje X.

**II.** Su módulo.

**A.** (I) por sí sola.

**B.** (II) por sí sola.

**C.** Ambas juntas, (I) y (II).

**D.** Cada una por sí sola, (1) o (2).

Lección 10

# Técnicas de conteo

## Principios básicos de conteo

1. ◆ Para asistir al matrimonio de su mejor amigo, Eduardo decidió comprar una camisa y un pantalón. En la tienda hay 6 diseños de pantalones y 4 de camisas.

   a. Representa la situación descrita a través de un diagrama de árbol.

   b. ¿De cuántas formas distintas puede elegir Eduardo?

   c. ¿De qué otra forma es posible obtener el mismo resultado? Describe la estrategia que utilizarías.

   d. La tienda amplía su catálogo de pantalones a 12 diseños de pantalones y 8 de camisas. ¿De cuántas formas distintas puede elegir Eduardo?

2. ◆ Lorena debe escoger dos tipos de pizza para la celebración de su cumpleaños. En la pizzería ofrecen de 5 tipos: napolitana, italiana, española, hawaiana y pepperoni.

   a. Completa el esquema con el primer y el segundo tipo de pizza.

   ______ · ______ = ______

   Primer tipo   Segundo tipo

   b. ¿De cuántas formas distintas puede escoger las pizzas?

3. En una sala de cine, cada fila tiene 10 asientos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir 10 personas sentadas en una fila?

4. La familia López desea construir su casa. Para ello, tienen diversas opciones: de uno o dos pisos; las paredes de ladrillo, madera o concreto; el tejado de tejas, lámina de PVC o lámina galvanizada; 2 o 3 baños. ¿Cuántas casas distintas se pueden construir?

5. Al director técnico de un club le falta por definir 3 titulares de su equipo. Para el puesto de arquero tiene 3 candidatos. Además, tiene 4 candidatos para defensa central y 5 para centrodelantero. ¿Cuántas formas distintas puede formar?

6. En cierta localidad, las patentes se forman con cuatro vocales y dos dígitos. Para evitar confusiones, no se utiliza la vocal O ni el número 0.

   a. ¿Cuántas patentes se pueden formar si los dígitos no se pueden repetir?

   b. ¿Cuántas patentes se pueden formar si las vocales no se pueden repetir?

   c. ¿Cuántas patentes se podrían formar sin considerar restricciones?

7. Para las vacaciones, Carlos debe escoger un libro y una serie. Para escoger, dispone de 5 libros y 12 series. ¿De cuántas formas distintas puede elegir?

# Permutaciones

**1.** Calcula el valor de las siguientes expresiones:

**a.** $4! =$

**b.** $6! =$

**c.** $10! =$

**d.** $\frac{6!}{4!} =$

**e.** $\frac{12!}{7!} =$

**f.** $\frac{19!}{11!} =$

**g.** $10! \cdot 3! =$

**h.** $8! \cdot 12! =$

**i.** $5 \cdot 14! =$

**j.** $(6 + 3)! =$

**2.** ◆ Pedro desea cambiar la clave de su celular. Quiere que el PIN de 4 dígitos tenga los números 2,5,7 y 9 sin repetir.

**a.** Anota las diferentes claves PIN que podría utilizar Pedro en su celular.

**b.** ¿Cuántas claves se pueden formar?

**c.** Pedro cambió de opinión y quiere que su PIN se forme solo con los dígitos 2, 5, 7, repitiendo el 7. ¿Cuántas claves diferentes podría formar?

**d.** Analiza las diferencias que hay entre las dos situaciones.

**3.** Realiza lo pedido en cada situación.

**a.** Las 6 formas posibles en que puedes escribir los dígitos 1, 2, 3, sin importar el orden y sin repetirlos.

**b.** Las 24 formas posibles en que puedes escribir los dígitos 1, 2, 3 y 4, sin importar el orden y sin repetirlos.

**c.** ◆ Analiza los ejercicios anteriores. ¿Qué estrategia puedes seguir para escribir todas las opciones sin repetir ni que falte ninguna?

**4.** Identifica el tipo de permutación que se utiliza en las siguientes situaciones.

**a.** Las maneras en que se pueden ordenar las letras de la palabra CONO.

**b.** El orden en que llegan 30 científicos a un seminario.

**c.** Las maneras en que se reproducen 10 canciones en un festival.

**d.** El orden en que se anotan los dígitos 3, 5, 5, 2, 2 y 6.

**5.** ◆ Resuelve los siguientes problemas.

**a.** Juan tiene en su cocina una repisa para 6 frascos de aliños y condimentos. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los frascos en la repisa?

**b.** En el estreno de una película hay 15 butacas reservadas para los críticos de cine. ¿De cuántas maneras diferentes se puede sentar a los críticos?

c. ¿Cuántas palabras diferentes (con o sin sentido) se pueden formar con las letras de la palabra TRIÁNGULO?

d. Un profesor desea armar diferentes formas de un examen reordenando las 10 preguntas de este. ¿Con cuántas formas puede contar el profesor?

6. ◆ En una fotografía institucional aparecen varios trabajadores: Diego, Josefa, Mario, Patricia, Catalina y Nicolás. Además, aparecen Jaime y Vanessa de recursos humanos y la gerente general Romina. Calcula, en cada caso, de cuántas maneras pueden aparecer en la fotografía con las condiciones dadas.

a. No hay restricciones en el orden de las personas.

b. Los integrantes de recursos humanos deben aparecer uno en cada extremo.

c. Los integrantes de recursos humanos deben aparecer juntos.

7. Un arqueólogo se percata de que se mezclaron restos fósiles de tres individuos de diferentes especies. El problema es que poseían los mismos restos óseos (fémur, cráneo y tibia) de cada uno.

a. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar los fósiles?

b. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar correctamente los fósiles, considerando que deben seguir el orden CRÁNEO – FÉMUR – TIBIA?

# Variaciones

**1.** Calcula el valor de las siguientes variaciones.

**a.** $V_3^6 =$

**b.** $V_3^7 =$

**c.** $V_2^8 =$

**d.** $V_4^8 =$

**e.** $Vr_4^5 =$

**f.** $Vr_2^5 =$

**g.** $Vr_3^7 =$

**h.** $Vr_6^7 =$

**2.** ◆ Expresa como una variación las siguientes multiplicaciones.

**a.** $8 \cdot 9 =$ ______

**b.** $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$ ______

**c.** $11 \cdot 12 \cdot 13 =$ ______

**d.** $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 =$ ______

**e.** $17 \cdot 18 =$ ______

**f.** $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) =$ ______

**3.** ◆ Determina el valor de *x* en cada caso.

**a.** $V_x^4 = 12$

**b.** $V_x^5 = 20$

**c.** $V_x^6 = 120$

**d.** $V_3^x = 210$

**e.** $V_5^x = 2520$

**f.** $V_2^x = 156$

4. Identifica si las variaciones asociadas a cada situación son con o sin repetición.

| Situación | Tipo de variación |
|---|---|
| Las formas de apilar algunos de los libros distintos de una estantería. | |
| El orden en que llegan los tres primeros estudiantes en el primer día de la semana. | |
| Las formas de escribir una contraseña de 5 letras distintas utilizando las letras de la palabra TRIÁNGULO. | |
| La cantidad de grupos de trabajo que se pueden formar con los estudiantes de un curso. | |

5. Un equipo de vóleibol debe escoger los colores de su uniforme para un campeonato interescolar. Cada componente del uniforme (camiseta, pantalón y medias) debe ser de un solo color. Los colores disponibles son los siguientes: negro, blanco, verde, azul, amarillo, violeta.

   a. Supón que las tres prendas deben ser de distintos colores. ¿Cuántos son los posibles uniformes?

   b. Si pueden repetirse colores, ¿de cuántas maneras se puede escoger un uniforme?

   c. Esta vez las medias y las camisetas deben ser del mismo color y el pantalón de un color distinto. ¿Cuántas son los posibles uniformes?

6. Se consideran los estudiantes: Miguel, Pablo, Antonia, Javiera, María, Agustín. Se debe escoger a tres de ellos para que expongan en una feria científica acerca del experimento que realizaron. Uno de ellos debe explicar el contexto en que se realizó el experimento. El segundo hará el análisis de los datos recopilados y el tercero expondrá.

   a. ¿De cuántas maneras se puede escoger a los estudiantes para exponer?

   b. Los estudiantes consideran que quien maneja mejor los datos recopilados es Javiera. ¿De cuántas maneras se puede escoger a los otros dos expositores?

c. Se debe escoger a otro estudiante para confeccionar material para difusión de la investigación. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar el equipo?

7. Se tienen ocho fichas con las letras Q-W-E-R-T-Y-U-I.

a. Se seleccionan 4 letras y se dispone de ellas horizontalmente. ¿De cuántas formas se las podría ordenar?

b. Se dispone de 5 letras, de las cuales la T debe ser la primera. ¿De cuántas formas se podrían ordenar las letras?

c. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de 5 letras se pueden escribir con las letras de "murciélago"?

8. Se lanza un dado de 8 caras tres veces y se anotan los resultados. ¿Cuántos son los resultados posibles?

9. Veinte estudiantes participan en una competencia de ortografía en la que se premian los cinco primeros lugares. ¿Cuántas son las formas de premiación posibles?

10. ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar con los dígitos 3 – 6 – 8 si estos pueden repetirse?

# Combinaciones

**1.** Calcula el valor de las siguientes expresiones:

**a.** $C_3^6 =$

**b.** $C_3^8 =$

**c.** $C_0^{12} =$

**d.** $C_8^9 =$

**e.** $Cr_3^5 =$

**f.** $Cr_2^7 =$

**g.** $Cr_4^6 =$

**h.** $Cr_4^9 =$

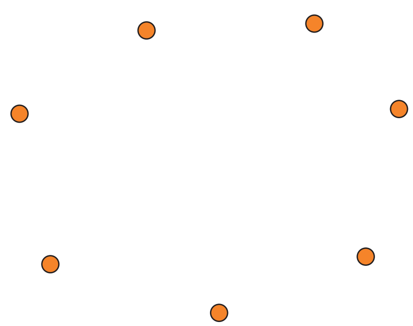
**2.** ◆ Considera los siguientes puntos:

**a.** ¿Cuántos triángulos diferentes pueden formarse?

**b.** ¿Cuántos cuadriláteros diferentes pueden formarse?

**c.** ¿Cuántos pentágonos diferentes pueden formarse?

**d.** ¿Cuántos hexágonos diferentes pueden formarse?



**e.** A medida que aumenta el número de lados de la figura, ¿aumenta o disminuye el número de combinaciones? Justifica tu respuesta.

**3.** ◆ Para crear una prueba, un profesor tiene un banco de 50 preguntas. Si de ellas escogerá 20, ¿de cuántas formas puede crear la prueba?

4. ◆ Para un curso de cocina quedan 6 cupos. Estos se llenarán aleatoriamente de un total de 26 postulantes. ¿De cuántas formas posibles pueden ser escogidos los postulantes?

5. En la celebración de cumpleaños de Camila, hay 23 personas, incluida Camila.

   a. ¿Cuántos saludos se darán los asistentes entre sí?

   b. La familia de Camila se compone de 4 personas. Estas se encuentran en la fiesta y no se saludan entre sí. ¿Cuántos saludos se darán los asistentes?

6. Catalina venderá de sus galletas artesanales. Puede elegir hacerlo en paquetes de 10, 25 y 40 galletas. ¿De cuántas maneras distintas venderá galletas si decide hacerlo en dos tipos de envases distintos?

7. En una competencia de atletismo pueden clasificar solamente 3 de los 10 participantes. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden conformar?

8. En un colegio, se deben elegir 3 salidas pedagógicas para el año. Se dispone de 8 posibles lugares para visitar. ¿Cuántas son las formas posibles de organizar las salidas?

9. Para cocinar una pizza, se cuenta con una variedad de 13 ingredientes. ¿Cuántos tipos de pizza de 4 ingredientes diferentes se pueden cocinar?

**10.** En una cafetería hay 15 tipos distintos de donuts. ¿De cuántas formas se pueden elegir 5 donuts si estas pueden repetirse?

**11.** De un curso de 28 estudiantes, 13 son hombres y 15 son mujeres. Para realizar un experimento en representación del colegio, un profesor debe escoger a 6 de ellos.

**a.** ¿De cuántas maneras puede escoger al grupo?

**b.** ¿De cuántas formas puede escoger al grupo si quiere que esté conformado por 3 hombres y 3 mujeres?

**c.** ¿De cuántas formas puede escoger al grupo si quiere que esté conformado por 2 hombres y 4 mujeres?

**12.** ◆ Una heladería ofrece a sus clientes 30 sabores distintos de helados. Un cliente quiere que le preparen una copa de helado de tres bolas.

**a.** ¿Entre cuántas copas de helado puede elegir el cliente si los tres sabores deben ser distintos?

**b.** Uno de los sabores debe ser chocolate y los tres sabores deben ser diferentes. ¿Cuántas copas de helado diferentes se pueden ofrecer al cliente?

**Para practicar**
gbit.cl/C21M2MP126A

# Aplicaciones

**1.** En un campeonato de hándbol participan 14 equipos y todos juegan entre sí una vez. ¿Cuántos partidos en total se jugarán en el campeonato?

**2.** ◆ Se lanzan 3 monedas y se anota la cantidad de caras y sellos de cada lanzamiento.

**a.** Completa la siguiente tabla con el número de casos para cada resultado posible.

| N° de sellos | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| N° de casos | | | | |

**b.** Al lanzar las monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y dos sellos?

**c.** ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos un sello?

**3.** Una familia está compuesta por el padre, la madre y sus cuatro hijos. Estos se sentarán en los 6 asientos disponibles en un cine.

**a.** ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro hijos se sienten uno al lado del otro?

**b.** ¿Cuál es la probabilidad de que los padres se sienten uno al lado del otro?

**4.** Se lanza una moneda cuatro veces seguidas.

**a.** Si se cuenta el número de caras, ¿cuántos resultados posibles hay?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan exactamente 3 caras?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos 2 caras?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 3 caras y que sea de manera consecutiva?

5. ◆ Un profesor piensa interrogar a la mitad de sus 40 estudiantes. Uno de ellos no estudió. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga seleccionado?

6. ◆ 10 mujeres y 6 hombres quieren jugar un partido de básquetbol. Para ello, deben seleccionar a 5 jugadores.

a. ¿Cuántos equipos se pueden formar, si cada jugador puede ocupar cualquier puesto y el equipo puede tener solamente mujeres?

b. ¿Cuántos equipos se pueden formar si deben estar formados por jugadores de cada género independiente del número?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo tenga a lo más 3 mujeres?

7. ◆ ¿Cuántas palabras que comiencen con D y terminen con U se pueden formar con o sin sentido usando las letras C – U – A – D – R – O?

8. ◆ Un grupo de 12 estudiantes es ordenado en una sola fila en la sala de clases para rendir una prueba.

a. ¿Cuántas filas diferentes se pueden formar?

b. Los estudiantes que se ubican en el primer, tercer y quinto puesto no pueden cambiarse de posición. ¿De cuántas maneras se puede ordenar el resto de los estudiantes?

9. ◆ Para organizar las actividades durante el año, los dos cuartos medios de un colegio formaron un comité de 4 personas que serán escogidas al azar. Para esto, cada curso ha presentado a 3 estudiantes. Los candidatos son:

| IV Medio A | IV Medio B |
|---|---|
| Gerardo | Carlos |
| Estefanía | Patricio |
| Andrea | Claudia |

a. ¿De cuántas formas diferentes puede escogerse el comité?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en el comité haya 2 estudiantes del mismo curso?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en el comité haya a lo menos una mujer y un hombre de cada curso?

10. ◆ Considera las letras de la palabra DIBUJAR. Si se seleccionan al azar cuatro de sus letras para formar una palabra con o sin sentido: ¿Cuál es la probabilidad de que contenga 4 consonantes?

## Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

**1.** Se desea saber de cuántas formas se puede escoger 4 tortas para una fiesta de un total de 12. ¿Cuál técnica de conteo emplearías para solucionar este problema?

**A.** Principio multiplicativo.

**B.** Permutaciones.

**C.** Variaciones

**D.** Combinaciones.

**2.** ¿Cómo se puede saber si se debe utilizar combinaciones o variaciones para resolver un determinado problema?

**A.** Si se deben formar grupos de tamaño menor que el total de los elementos.

**B.** Si se necesita formar la mayor cantidad de grupos posibles.

**C.** Si importa el orden de los elementos.

**D.** Si se utilizan todos los elementos del grupo.

**3.** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa respecto de las técnicas de conteo?

**A.** En las combinaciones, no importa el orden de los elementos.

**B.** En una permutación, no se consideran todos los elementos del conjunto.

**C.** Para calcular el total de variaciones posibles de un conjunto, se emplea el principio multiplicativo.

**D.** En las permutaciones y en las variaciones, importa el orden de los elementos.

**4.** ¿Cuántos números de 4 cifras distintas compuestos solo por dígitos impares se pueden formar?

**A.** 14

**B.** 20

**C.** 60

**D.** 120

**5.** Se tienen 3 libros distintos de Matemática, 4 de Física y 2 de Química. ¿De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si deben quedar juntos por asignatura?

**A.** 64

**B.** 288

**C.** 576

**D.** 1728

**6.** ¿Cuál es el valor de $5! \cdot 3!$?

**A.** 129

**B.** 360

**C.** 600

**D.** 720

**7.** Se lanza un dado de 6 caras y dos monedas. ¿Cuántos resultados se pueden obtener?

**A.** 6

**B.** 12

**C.** 24

**D.** 36

**8.** ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 5 personas en 3 sillas?

**A.** 8

**B.** 15

**C.** 60

**D.** 125

**9.** Se tienen cinco puntos no alineados. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar utilizando dichos puntos?

**A.** 10

**B.** 5

**C.** 4

**D.** 3

**10.** Una carrera tiene 7 competidores, todos con las mismas posibilidades de ganar. ¿De cuántas maneras se pueden definir los tres primeros lugares?

**A.** 21

**B.** 35

**C.** 90

**D.** 210

**11.** Una persona quiere que el PIN de 4 dígitos de su teléfono celular contenga el dígito 2 una sola vez y no contenga el dígito 8. ¿Cuántas claves posibles pueden generarse?

**A.** $9^4$

**B.** $\frac{9!}{3!}$

**C.** $9^3$

**D.** $\frac{9!}{4!}$

**12.** A un estudiante se le ha entregado una caja con 12 lápices de colores diferentes y un dibujo con 6 secciones para colorear. Él decide pintar cada sección de diferente color. ¿Cuántas combinaciones de colores se pueden formar?

**A.** $C_6^{12}$

**B.** $C_6^{17}$

**C.** $V_6^{12}$

**D.** $V_6^{17}$

**13.** ¿Cuál es el valor de $x$ si $\binom{x}{2} = 10$?

**A.** 4

**B.** 5

**C.** 10

**D.** 20

**14.** ¿Cuál es el valor de $\frac{7!}{5!(7-5)!}$?

**A.** 0

**B.** 5

**C.** 21

**D.** 72

**15.** ¿Cuántos códigos de 7 dígitos (con repetición) pueden formarse con los números del 0 al 9?

**A.** 7!

**B.** $10^7$

**C.** $\frac{4}{10}$

**D.** $C_4^{10}$

**16.** En la biblioteca de un colegio hay 7 libros de poemas, 6 de novelas y 8 de ciencia ficción. Si un estudiante debe leer un libro de cada género, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

**A.** 336

**B.** 104

**C.** 90

**D.** 50

**17.** ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden construir con los dígitos del 1 al 9?

**A.** 9!

**B.** $\frac{5!}{9!}$

**C.** $\frac{9!}{5!}$

**D.** $\frac{9!}{4!}$

# Variable aleatoria

## Definición de variable aleatoria

**1.** Clasifica las variables aleatorias como discretas o continuas.

**a.** ____________________ $X$: Número de accidentes automovilísticos durante un fin de semana largo.

**b.** ____________________ $Y$: Tiempo que dura un seminario de ciencias.

**c.** ____________________ $Z$: Cantidad de lluvia caída en una ciudad durante el año.

**d.** ____________________ $W$: Número de mascotas que hay en una familia.

**2.** ◆ Determina la variable aleatoria. Luego, escribe el espacio muestral. Finalmente, determina el recorrido de la variable.

**a.** Experimento: Lanzar 5 monedas y anotar la cantidad de sellos.

- Variable $X$: ____________________
- Espacio muestral:
- Recorrido de la variable $X$: ____________________

**b.** Experimento: Lanzar dos dados y anotar el número de cincos que se obtienen.

- Variable $X$: ____________________
- Espacio muestral:
- Recorrido de la variable $X$: ____________________

**c.** Experimento: Extraer dos fichas simultáneamente de una bolsa que contiene 7 fichas numeradas con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Luego, sumar sus valores.

- Variable $X$: ____________________
- Espacio muestral:
- Recorrido de la variable $X$: ____________________

**d.** Experimento: Extraer de una bolsa 3 letras de la palabra DICIEMBRE y anotar el número de vocales obtenidas.

- Variable $X$: ______________________________
- Espacio muestral:

- Recorrido de la variable $X$: ______________________________

**e.** Experimento: Lanzar un dado de 10 caras y anotar el número de divisores que tiene el número obtenido.

- Variable $X$: ______________________________
- Espacio muestral:

- Recorrido de la variable $X$: ______________________________

**3.** ◆ **Construye un diagrama sagital para las siguientes variables. Relaciona el espacio muestral con el recorrido de la variable.**

**a.** $X$: Se lanzan 3 monedas y a la cantidad de caras se le resta la cantidad de sellos.

**b.** $X$: Se lanza un dado de 6 caras y el resultado obtenido se asocia al resto que se obtiene al dividirlo por 4.

c. $X$: Se lanza un dado de 4 caras y uno de 6, y se suman los números obtenidos en ambas caras.

4. ◆ Una empresa realiza fumigaciones en un pasaje donde hay 8 casas. Para elaborar un plan de acción, el encargado decide averiguar el número de casas que tienen problemas de plagas.

a. ¿Cuál es la variable aleatoria $X$ que está estudiando el encargado de la empresa?

b. ¿Qué valores puede tomar la variable $X$?

c. ¿Puede la variable tomar el valor 9? ¿Por qué?

d. ¿Qué significa que la variable tome el valor 0? ¿Qué acción debería tomar la empresa en este caso?

5. ◆ Se define la variable aleatoria $X$ como la multiplicación entre dos números enteros entre el 1 al 6 (ambos inclusive), escogidos al azar y sin reposición.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. ¿Cuál es el recorrido de la variable $X$?

c. Si el experimento se realiza con reposición, ¿cuál es el espacio muestral?

d. Si el experimento se realiza con reposición, ¿cambia el recorrido de la variable?

**6.** ◆ En el centro de distribución de una fábrica de hornos hay 600 aparatos. Para saber si están en condiciones de ser vendidos, se eligen 30 al azar y se los revisa.

a. ¿Qué porcentaje de las cajas se revisan?

b. Pedro dice que hay $\frac{600!}{570!}$ formas de elegir los 30 aparatos que se revisarán. ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.

c. Una vez que las cajas se revisan, los hornos se clasifican en B (buenos) y D (defectuosos). Completa un diagrama de árbol que ilustre los casos posibles después de revisar el cuarto horno.

d. ¿Cuántos posibles casos hay después de revisar 30 hornos?

e. Rodolfo dice que hay 142 506 casos para el resultado de solo 5 hornos defectuosos y 25 buenos. ¿Cómo llegó a ese resultado?

# Probabilidad de una variable aleatoria

**1.** Analiza cada afirmación y determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

**a.** ______ La probabilidad de un valor de la variable aleatoria puede ser menor que 0.

**b.** ______ La suma de las probabilidades de una variable aleatoria en todo el recorrido de la variable siempre es 1.

**c.** ______ Si una variable $X$ tiene como recorrido {1,2,3,4}, el valor que toma $P(X = 5)$ es 0.

**d.** ______ Una variable aleatoria no puede tomar valores negativos.

**2.** De una baraja inglesa, se tienen las cartas: 2, 4, 5, 7 de corazones. El experimento consiste en extraer tres cartas de manera simultánea y contar la cantidad de números primos extraídos.

**a.** ¿De cuántos elementos se compone el espacio muestral del experimento?

**b.** ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

**c.** ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria?

**d.** Calcula las probabilidades asociadas a cada elemento del recorrido de la variable.

**e.** ¿Qué elemento del recorrido de la variable tiene asociada una mayor probabilidad?

**3.** ◆ Analiza cada tabla. Luego, calcula el valor de $p$ y crea una situación que pueda ser representada por esos valores.

**a.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | $p$ | 0,1 |

- $p =$ ______
- Situación: ______________________________

**b.**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $2p$ | $p$ | 0,4 |

- $p =$ ______
- Situación: ______________________________

**c.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | $p$ | $3p$ | $0{,}5p$ |

- $p =$ ______
- Situación: ______________________________

**d.**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{p}{2}$ | $\frac{p}{4}$ | $2p$ | $3p$ | $p$ |

- $p =$ ______
- Situación: ______________________________

**4.** En un colegio, se realiza un estudio sobre las causas por las cuales los estudiantes llegan atrasados. Una de ellas es que se quedan dormidos.
Se considera la variable $X$: cantidad de veces que un estudiante se queda dormido al mes.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 o más |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,3 | 0,25 | 0,3 |

**a.** ¿Cuál es el recorrido de la variable?

**b.** ¿Qué valor tiene la variable si la probabilidad es 0,15?

**c.** Se selecciona un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este se haya quedado dormido una vez?

**d.** Se selecciona un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este se haya quedado dormido 2 o más veces?

**e.** Se selecciona un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este se haya quedado dormido a lo más una vez?

**5.** ◆ Analiza las siguientes tablas y explica el error que aparece en cada una.

**a.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | −0,2 | 0,5 | 0,7 |

b.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,05 | 0,35 | 0,25 | 0,1 |

6. Considera las siguientes variables aleatorias asociadas a dos experimentos distintos.

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $a$ | $b$ | 0,4 |

| $y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | $2a$ | $b$ | 0,2 |

a. ¿Qué estrategia utilizarías para calcular los valores de a y b?

b. Calcula los valores de $a$ y $b$.

- $a$ = ________
- $b$ = ________

c. ¿Cuál es la probabilidad de que $X = 4$?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y = 0$?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y \geq 1$?

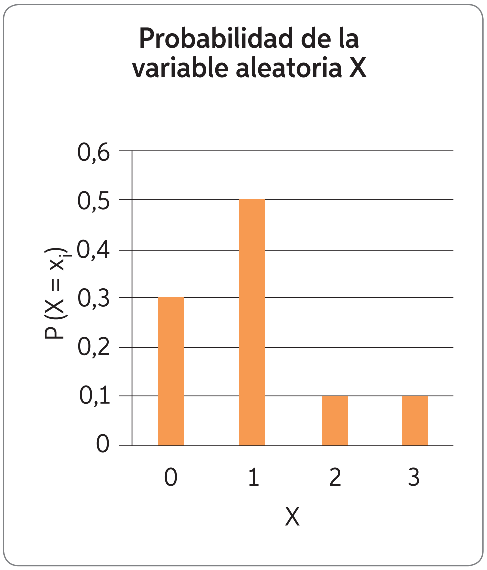
f. ¿Cuál es la probabilidad de que $X < 6$?

g. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y \geq 0$

# Gráfica de la distribución de una función de probabilidad

**1.** ◆ Determina el recorrido de la variable aleatoria. Luego, completa la tabla correspondiente para cada gráfico.

**a.**

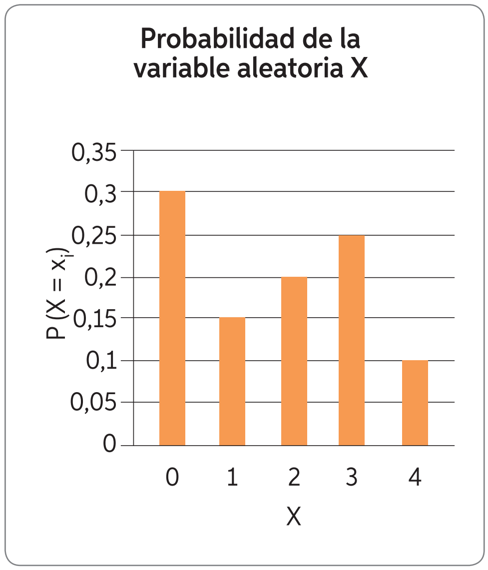



- Recorrido: ______________________

- 

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

**c.**

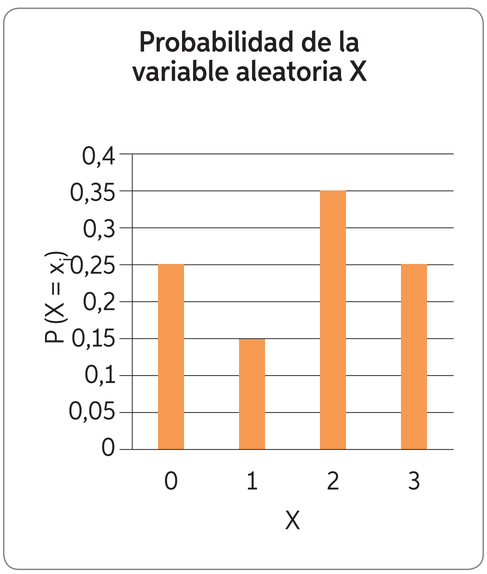



- Recorrido: ______________________

- 

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |

**b.**

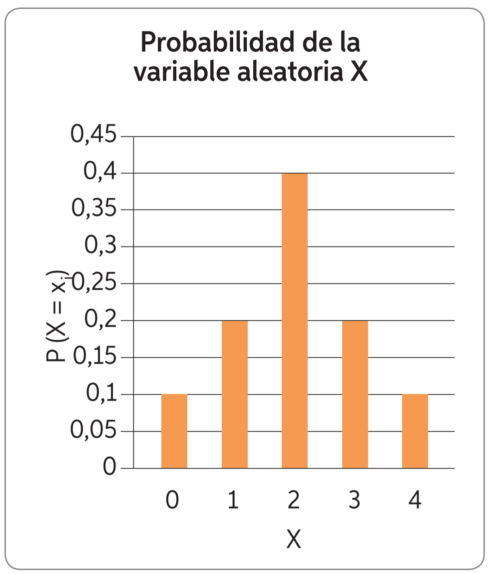



- Recorrido: ______________________

- 

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

**d.**




- Recorrido: ______________________

- 

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |

**2.** ◆ Construye el gráfico correspondiente a las probabilidades de la variable aleatoria dada.

**a.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,25 | 0,45 | 0,1 | 0,2 |

**b.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,05 | 0,15 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

**c.**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,15 |

**3.** Completa la tabla correspondiente a la función de distribución. Construye, además, el gráfico correspondiente para cada función de probabilidad.

**a.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,55 | 0,25 | 0,05 |

- | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
  |---|---|---|---|---|
  | $P(X \leq x_i)$ | | | | |

-

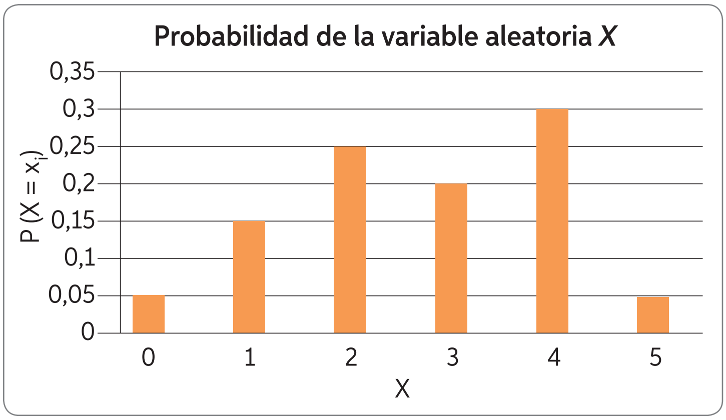
**b.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

- | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
  |---|---|---|---|---|---|
  | $P(X \leq x_i)$ | | | | | |

-

**4.** ◆ En una caja hay bolsas que contienen diferentes cantidades de galletas. El siguiente gráfico muestra la probabilidad de que una persona obtenga cierta cantidad de galletas si extrae una bolsa al azar.




**a.** ¿Cuál es la variable aleatoria?

**b.** ¿Cuál es el recorrido de la variable?

**c.** Se extrae una bolsa de la caja. ¿Cuál es la cantidad de galletas menos probable de obtener? ¿Y la más probable?

**d.** Completa la siguiente tabla con la función de distribución de probabilidad.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \leq x_i)$ | | | | | | |

**e.** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona extraiga una bolsa que tenga a lo más 2 galletas?

**f.** ¿Cuál es la probabilidad de que alguien extraiga una bolsa con más de 2 galletas, pero menos de 4?

## Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

**1.** Una variable aleatoria es:

**A.** un suceso.

**B.** un experimento.

**C.** una función.

**D.** un conjunto.

**2.** Se tiene una caja con 5 bolitas numeradas del 0 al 5. Se extrae una de ellas, con reposición, hasta que salga un número par. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria $X$: cantidad de extracciones hasta que sale un número par?

**A.** {1, 2, 3, 4, 5}

**B.** {0, 1, 2, 3, 4, 5}

**C.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}

**D.** {1, 2, 3, 4, 5, …}

**3.** Se define la variable aleatoria $X$: tiempo de retraso en el transporte público de una ciudad. Respecto de ella, es correcto afirmar:

**I.** Es finita.

**II.** Es continua.

**III.** Su recorrido es un intervalo de números reales.

**A.** Solo I.

**B.** Solo I y III.

**C.** Solo II y III.

**D.** I, II y III.

**4.** En una prueba de 5 ejercicios se define la variable $Z$: cantidad de respuestas correctas. Entonces, es correcto afirmar:

**I.** El recorrido de $Z$ es {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

**II.** El espacio muestral tiene 6 elementos.

**III.** $Z = 1$ solo tiene un caso.

**A.** Solo I.

**B.** Solo I y II.

**C.** Solo I y III.

**D.** I, II y III

**5.** Al seleccionar un estudiante de un curso, se define la variable aleatoria $X$ a partir de algún parámetro del estudiante seleccionado. ¿En cuál de los siguientes casos el recorrido de $X$ es continuo?

**A.** $X$: Número de primos que tiene el estudiante.

**B.** $X$: Número de lista del estudiante seleccionado.

**C.** $X$: Rut del estudiante seleccionado sin dígito verificador.

**D.** $X$: Estatura del estudiante seleccionado, medida en metros.

**6.** En el lanzamiento de un dado de ocho caras se define la variable aleatoria $X$ como $X = 0$ si el número obtenido es menor que 4; $X = 1$ si el número obtenido es igual a 4 y $X = 2$ en otro caso. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

**A.** Si se obtiene un 7, entonces $X = 2$

**B.** El recorrido de $X$ es {0,1,2}

**C.** El espacio muestral es {0, 1, 2, 4}.

**D.** $X = 1$ para un resultado.

**7.** La variable aleatoria $X$ tiene por recorrido {$a$, $b$, $c$, $d$, $e$} y se define la siguiente función de probabilidad.

$$P(X = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = a \\ 0,3 & \text{si } k = b \\ 0,2 & \text{si } k = c \\ p & \text{si } k = d \\ 0,2 & \text{si } k = e \end{cases}$$

¿Cuál es el valor de $p$?

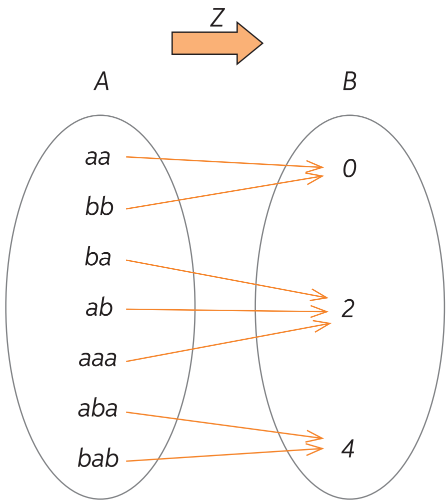
**A.** 0,15

**B.** 0,30

**C.** 0,45

**D.** 0,50

**8.** Analiza el diagrama de la variable aleatoria $Z$.




Según el diagrama, ¿cuál es el valor de $P(Z = 4)$?

**A.** $\frac{1}{7}$

**B.** $\frac{2}{7}$

**C.** $\frac{4}{7}$

**D.** $\frac{1}{3}$

**9.** El recorrido de la variable aleatoria $X$ es {1, 3, 5} y $P(X = 1) = 0{,}1$ y $P(X = 3) = 0{,}3$. Entonces:

**A.** $P(X = 5) = 0{,}1$

**B.** $P(X = 5) = 0{,}5$

**C.** $P(X = 5) = 0{,}6$

**D.** $P(X = 5) = 0{,}7$

**10.** La tabla muestra la función de probabilidad para la variable $X$. Entonces, es correcto afirmar:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $0{,}2a$ | $0{,}8a$ | $0{,}4a$ | 0,3 |

**A.** El valor de a es 0,5.

**B.** $P(X \leq 2) = 0{,}4$

**C.** $P(X \leq 3) = 0{,}7$

**D.** $P(X = 3) - P(X = 1) = 0{,}1$

**11.** Una urna tiene 2 bolitas verdes, 3 rojas y 2 azules. Al extraer 3 bolitas al azar y sin reposición, se define la variable aleatoria $X$ como el número de bolitas rojas extraídas y la variable $Z$ como el número de bolitas verdes extraídas. A partir de ello, es incorrecto afirmar:

**I.** El recorrido de $X$ es {0, 1, 2}.

**II.** $P(X = 1) < P(Z = 2)$

**III.** $P(X = 0) = 4P(X = 3)$

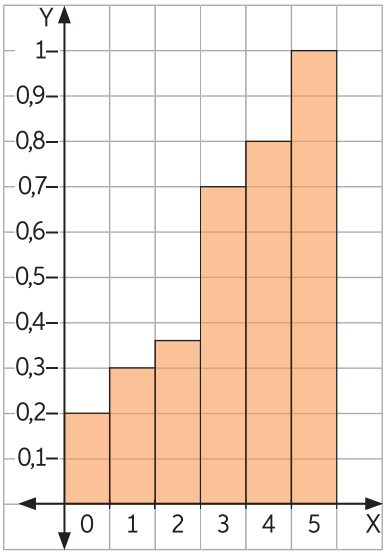
**A.** Solo I.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y II.

**D.** Solo I y III.

**12.** ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es (son) verdadera(s) con respecto al gráfico de distribución de la figura?




**I.** El valor que tiene la menor probabilidad de ocurrir es $X = 2$.

**II.** La probabilidad de $X = 3$ es 0,7.

**III.** De todos los valores de X, el valor que tiene una mayor probabilidad de ocurrir es $X = 5$.

**A.** Solo I.

**B.** Solo III.

**C.** Solo I y III.

**D.** Solo I y III.

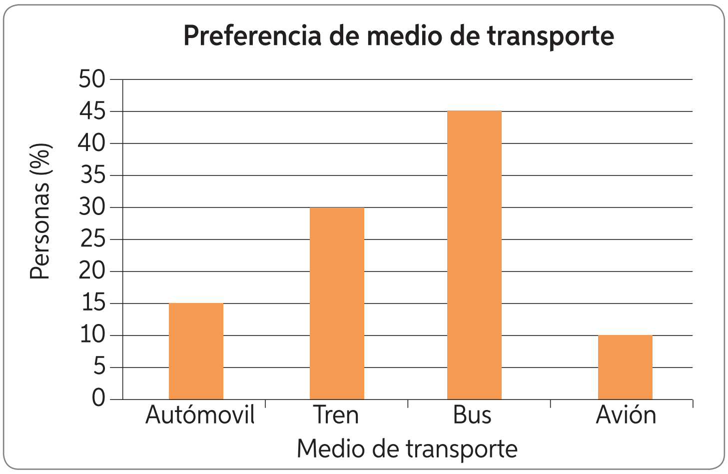
Lección 12

# Probabilidad en la sociedad

## La probabilidad en los medios de comunicación

**1.** ◆ Analiza cada afirmación con relación al gráfico propuesto. Luego, determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

Una agente de viajes está interesada en mejorar sus ofertas para las próximas Fiestas Patrias. Para ello, se propone conocer los medios de transporte de quienes viajaron en las festividades pasadas.




**a.** ______ La probabilidad de que una persona viaje en tren es la más alta.

______________________________________

**b.** ______ El 40 % de los turistas viaja en tren o en avión.

______________________________________

**c.** ______ La probabilidad de que una persona viaje en automóvil es de 0,15.

______________________________________

**d.** ______ El avión es el medio menos utilizado.

______________________________________

**e.** ______ La probabilidad de que una persona viaje en tren o automóvil es la misma de que viaje en bus.

______________________________________

**f.** ______ La probabilidad de que una persona viaje en tren es mayor que la probabilidad de viaje en automóvil o en avión.

______________________________________

**g.** ______ Más de la mitad de las personas viaja en bus.

______________________________________

2. ◆ La tabla contiene un resumen de un estudio del Servicio Nacional para la Prevención y Rehabilitación del Consumo de Drogas y Alcohol (SENDA). En él, se muestra la proporción de adolescentes, de octavo básico a cuarto medio, que inician su consumo de alcohol antes de los 15 años. Esto es válido para 9 años comprendidos entre 2001 y 2017.

| Año | Hombre (%) | Mujer (%) | Total (%) |
|---|---|---|---|
| 2001 | 67,4 | 67,4 | 67,4 |
| 2003 | 71,0 | 70,1 | 70,5 |
| 2005 | 68,9 | 69,3 | 69,1 |
| 2007 | 68,4 | 68,5 | 68,5 |
| 2009 | 68,2 | 68,3 | 68,3 |
| 2011 | 66,7 | 66,1 | 66,2 |
| 2013 | 66,1 | 64,8 | 65,4 |
| 2015 | 65,5 | 64,3 | 64,9 |
| 2017 | 63,2 | 65,9 | 64,7 |

a. ¿En qué año hubo mayor diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres que consumieron alcohol precozmente?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se iniciara precozmente en el consumo de alcohol en el 2017?

c. ¿En qué año fue la mayor probabilidad de que los estudiantes consumieran alcohol por primera vez antes de los 15 años?

d. Escribe dos conclusiones a partir de la tabla. Luego, compártanlas en parejas.

3. ◆ Se realizó una encuesta sobre el uso frecuente de redes sociales durante un año. Los resultados son los siguientes:

| Red social | Total (%) | Mujer (%) | Hombre (%) | 18-24 años (%) | 25-34 años (%) | 35-44 años (%) | 45-54 años (%) | 55+ años (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| WhatsApp | 72 | 70 | 74 | 88 | 84 | 71 | 71 | 34 |
| Facebook | 59 | 57 | 61 | 86 | 69 | 52 | 53 | 25 |
| Instagram | 24 | 20 | 28 | 46 | 26 | 13 | 6 | 8 |
| Twitter | 19 | 20 | 17 | 23 | 24 | 17 | 10 | 10 |
| LinkedIn | 9 | 8 | 11 | 10 | 12 | 7 | 7 | 3 |

a. ¿Cuál es el rango de edad que utiliza menos la red social WhatsApp?

b. ¿Cuál es el rango de edad que utiliza más la red social Instagram?

c. Plantea una conclusión a partir de los datos de la tabla. Luego, compártanla en parejas.

4. ◆ Se realizó un estudio con respecto al consumo de pescado en Chile. En él, se obtuvieron los siguientes resultados:

| Tipo de pescado | Mujer (%) | Hombre (%) |
|---|---|---|
| Pescado enlatado | 84 | 84 |
| Pescado fresco | 77 | 83 |
| Pescado congelado | 38 | 37 |

a. ¿Cuál de los tipos de pescado es consumido de igual forma por mujeres y hombres?

b. Se elige una mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esta consuma pescado enlatado?

# Probabilidad y toma de decisiones

1. ◆ En un casino de juegos hay dos máquinas:

   - **Máquina A**: la probabilidad de ganar el premio mayor es cercana al 4,5 % y la de perder es cercana al 94,5 %.
   - **Máquina B**: la probabilidad de ganar el premio mayor es de 5,3 % y de perder es de 94,2 % .

   a. ¿En qué máquina te conviene jugar si quieres ganar el premio mayor? ¿Por qué?

   b. ¿En cuál máquina te conviene jugar si solo te interesa ganar algún premio? ¿Por qué?

2. La siguiente tabla muestra la probabilidad de ganancia según tipo de fondo en dos empresas de inversiones.

| Empresa | Tipo de fondo | | |
|---|---|---|---|
| | Conservador (%) | Moderado (%) | Arriesgado (%) |
| Empresa A | 7,5 | 10,3 | 15,7 |
| Empresa B | 7,8 | 10,1 | 14,8 |

   a. Un cliente desea invertir en un fondo moderado. ¿Qué empresa le conviene? ¿Por qué?

   b. Un cliente desea invertir en un fondo arriesgado. ¿Qué empresa le conviene? ¿Por qué?

   c. ¿En qué empresa es más conveniente invertir? Justifica tu respuesta.

   d. Si tú fueras un cliente, ¿qué empresa y tipo de fondo escogerías? ¿Por qué?

**3.** Un laboratorio necesita comprar microscopios. Para ello, realiza una comparación entre 2 modelos:

| Microscopio | Características | |
|---|---|---|
| | Pérdida de la calidad de la imagen a la luz (%) | Precisión (%) |
| AS-20 | 2,8 | 89,9 |
| RJ-48 | 3,2 | 90,4 |

**a.** En el laboratorio desean comprar media docena de microscopios y les interesa su precisión. ¿Cuál de los dos modelos les recomendarías?

**b.** A otro laboratorio le interesa obtener del microscopio una mejor imagen a la luz. ¿Cuál les recomendarías?

**4.** ◆ Analiza la situación. Luego, realiza las actividades.

En la final de un concurso hay tres concursantes empatados. Para definir al ganador, se pide a cada uno que saque una carta de un mazo de 40 cartas de diferentes colores. Si esta es roja, el concursante será el ganador. Las probabilidades de obtener cada color para cada concursante se presentan en la siguiente tabla.

| Concursante | Color (probabilidad) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Azul | Verde | Rojo | Amarillo |
| A | 0,25 | 0,35 | 0,15 | 0,25 |
| B | 0,1 | 0,4 | 0,25 | 0,25 |
| C | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,2 |

**a.** ¿Cuál es la probabilidad de que solo el concursante A gane la prueba?

**b.** ¿Cuál es la probabilidad de que solo los concursantes A y C ganen la prueba?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que dos concursantes saquen la carta amarilla?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres obtengan el mismo color?

e. Si fueras juez del concurso, ¿qué color escogerías para que fuese más justa la elección del ganador?

f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta roja o amarilla del concursante B?

**5.** En un concurso se utilizan cartas de un mazo inglés para entregar un premio. Para ello, se han puesto boca abajo tres montones de cartas. El concursante debe elegir primero "número" o "figura". A continuación, debe escoger una carta de uno de los montones. Si la carta obtenida coincide con la elección inicial del concursante, ganará el premio. Las probabilidades de "número" o "figura" de cada montón de cartas son las siguientes:

| | Montón A | Montón B | Montón C |
|---|---|---|---|
| **Número (probabilidad)** | 0,2 | 0,6 | 0,3 |
| **Figura (probabilidad)** | 0,8 | 0,4 | 0,7 |

a. ¿Cuál de los montones sería conveniente escoger si un concursante eligió primero la opción "número"?

b. Un concursante seleccionó el montón C. ¿Qué debería haber escogido inicialmente para que sea mayor su probabilidad de ganar el premio?

# Interpretación de la probabilidad

1. ◆ Identifica en cada situación el tipo de probabilidad involucrada (subjetiva, frecuencial o clásica). Justifica tu respuesta.

   a. La probabilidad de que el equipo de básquetbol de 8° básico derrote al de 2° medio es de 4 %.

   ______________________________

   b. La probabilidad de encontrarnos en el recital es de una en un millón.

   ______________________________

   c. A partir de estudios del clima realizados en una región, la probabilidad de que llueva un día de febrero es de 15 %.

   ______________________________

   d. Al lanzar un dado la probabilidad de obtener un número mayor que 4 es aproximadamente 33 %.

   ______________________________

   e. El 27 % de las enfermedades respiratorias en invierno se origina por contaminación intradomiciliaria, relacionada con el uso de estufas.

   ______________________________

2. ◆ Analiza cada afirmación. Determina si es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

   a. ______ La interpretación probabilística subjetiva se basa en el análisis de la cantidad de casos favorables y totales.

   ______________________________

   b. ______ Las probabilidades obtenidas al estudiar una enfermedad tienen una interpretación frecuencial.

   ______________________________

   c. ______ El lanzamiento de una moneda tiene asociadas probabilidades con interpretaciones subjetivas.

   ______________________________

   d. ______ Para determinar la probabilidad de ganar un premio en una rifa, se puede utilizar probabilidad clásica.

   ______________________________

3. ◆ Crea una situación para cada tipo de interpretación probabilística. Justifica, en cada caso, por qué se relaciona con cada interpretación.

a. Interpretación probabilística clásica.
   - Situación:
   - Justificación:

b. Interpretación probabilística frecuencial.
   - Situación:
   - Justificación:

c. Interpretación probabilística subjetiva.
   - Situación:
   - Justificación:

4. Cierta creencia popular afirma que el color rojizo del cielo al atardecer puede anunciar un terremoto.

a. ¿Cómo crees que surgió esta afirmación? Comenten en parejas.

b. ¿Crees que esta información es suficiente para afirmar que pronto ocurrirá un sismo? Justifica.

c. ¿Qué tipo de interpretación probabilística está presente en la situación? Justifica tu respuesta.

5. ◆ Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo.

a. Se consulta a un experto al investigar sobre un fenómeno que involucra azar. Sin embargo, como está dando opinión, esta podría ser una interpretación probabilística subjetiva.

- Error: ____________________
- Corrección: ____________________

b. La principal diferencia entre interpretación probabilística subjetiva y frecuentista es que la primera se centra en la regla de Laplace. La segunda, por el contrario, apela a la intuición.

- Error: ____________________
- Corrección: ____________________

c. El conteo de ocurrencias de un evento específico observando muchas repeticiones de un experimento está asociado a la probabilidad clásica.

- Error: ____________________
- Corrección: ____________________

d. La variable de estudio de un experimento es "Número de estudiantes que reprueban un ramo en la universidad". Entonces, es conveniente dar a los resultados una interpretación probabilística clásica.

- Error: ____________________
- Corrección: ____________________

6. Completa la tabla destacando las diferencias y las similitudes de la interpretación frecuentista entre la probabilidad clásica y la probabilidad subjetiva.

| Diferencias | Similitudes |
|---|---|
| | |

7. Javiera ha decidido realizar un estudio sobre los índices de contaminación durante el invierno, asociados a fenómenos climáticos. En una primera instancia, decidió recurrir a su profesor de Ciencias. Este le afirmó que las bajas temperaturas provocan aumento en los índices de contaminación. No satisfecha con la respuesta, decidió buscar algunos estudios que le entregaran información sobre el tema. Tras varias horas de investigación, encontró un estudio que revelaba una interpretación probabilística frecuencial.

a. ¿Qué tipo de interpretación probabilística entregó el profesor de Javiera?

b. ◆ ¿Qué característica debió haber tenido dicho estudio para que fuera considerado una interpretación probabilística frecuencial?

c. ◆ En parejas, investiguen y describan un estudio sobre los episodios de contaminación en invierno. Deben buscar alguno que se entreguen probabilidades asociadas a una interpretación como la que encontró Javiera.

8. Un profesor decidió sortear un premio entre un grupo de 10 estudiantes. Les dijo que pensaría un número entre el 1 y el 10, y que lo anotaría en un papel. Luego, siguiendo exactamente el orden en que estaban ubicados en la clase, pediría a cada estudiante mencionar un número distinto. El ganador sería quien acertara el número anotado. La mayoría estuvo de acuerdo. Sin embargo, quien estaba al final dijo que el sorteo no le parecía justo, pues él tendría muy poca probabilidad de obtener el premio.

a. ¿Qué tipo de probabilidad se debería aplicar en la situación para saber si el último estudiante tiene o no la razón? Explica.

b. Desarrolla un procedimiento que permita demostrar si la afirmación del último estudiante es verdadera o falsa.

c. Crea un argumento utilizando cada tipo de probabilidad.

- Interpretación probabilística clásica:

- Interpretación probabilística experimental:

- Interpretación probabilística subjetiva:

# Antes de continuar

Lee con atención y marca la alternativa correcta.

1. ¿Qué significa que la probabilidad teórica de que ocurra un cierto suceso sea $\frac{2}{5}$?
   - A. Por cada 2 resultados favorables a dicho suceso, hay 5 que no lo son.
   - B. Cada vez que ocurren dos resultados favorables a dicho suceso, ocurren 5 que no lo son.
   - C. Al realizar el experimento 5 veces, habrá 2 resultados favorables a dicho suceso.
   - D. El número de resultados favorables a dicho suceso y el número de resultados posibles del experimento están en la razón 2 : 5.

2. ¿En cuál de las siguientes situaciones el tipo de probabilidad involucrada es subjetiva?
   - A. Al lanzar una moneda no cargada, la probabilidad de que salga sello es de 0,5.
   - B. Estoy 90 % seguro de que aprobaré el examen final con nota superior a 6,0.
   - C. Según los resultados de 1000 lanzamientos de un dado de 6 caras, la probabilidad de obtener un número primo se iguala a la de obtener un número par.
   - D. De una encuesta realizada en un colegio sobre deporte preferido se desprende lo siguiente: al seleccionar un estudiante al azar, la probabilidad de que este prefiera atletismo es de 35 %.

3. Lee la siguiente aseveración: “hay un 40 % de probabilidad de que llueva, porque veo la cordillera tapada de nubes”. ¿A qué tipo de probabilidad corresponde?
   - I. Probabilidad teórica.
   - II. Probabilidad de frecuencia relativa o experimental.
   - III. Probabilidad subjetiva.
   - A. Solo I.
   - B. Solo II.
   - C. Solo III.
   - D. Solo I y II.

4. En una tienda electrónica se venden dos tipos de computadores: Celerio II y Rapid 3. El 65 % de los clientes de la tienda compró un Celerio II. Se sabe que la probabilidad de que este venga con fallas es de 0,02, mientras que la probabilidad de que un Rapid 3 tenga fallas es de 0,05. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   - A. 65 % clientes compraron un Celerio II.
   - B. Es más probable que un computador Celerio II venga con fallas que un computador Rapid 3.
   - C. Al seleccionar al azar un cliente, la probabilidad de que haya comprado un Rapid 3 y que este venga con fallas es de 0,007.
   - D. Al seleccionar al azar un cliente, la probabilidad de que haya comprado un Celerio II y que este no venga con fallas es de 0,637.

5. En una exposición de la carrera de Estadística, a cada asistente se le entrega dos monedas y se les pide que las lancen y que anoten los resultados obtenidos. Se observa que 200 personas obtuvieron una cara y un sello. Esto corresponde al 44 % del total de asistentes y al doble de la cantidad de los que obtuvieron dos sellos. ¿Cuál es la probabilidad de que un asistente que obtenido solo caras?
   - A. 0,18
   - B. 0,25
   - C. 0,32
   - D. 0,34

**6.** Un grupo de estudiantes realizó un experimento con 100 transeúntes. Una vez analizados los resultados, publicaron lo siguiente: "A 100 transeúntes se les entregó un texto breve para que lo leyeran y contestaran un conjunto de preguntas. Los resultados muestran que el 60 % demora más de 7 minutos en leer el texto. De estos, el 80 % se equivoca en contestar más de la mitad del cuestionario".

De acuerdo con la información anterior, es correcto afirmar que:

- **I.** El 40 % de los transeúntes que participaron en el experimento demora 7 minutos o menos en leer el texto.
- **II.** La probabilidad de que una persona haya contestado correctamente más de la mitad del cuestionario es de 20 %.
- **III.** La probabilidad de que alguien haya contestado incorrectamente más de la mitad del cuestionario es de a lo menos 48 %.

**A.** Solo I.

**B.** Solo I y II.

**C.** Solo I y III.

**D.** Solo II y III.

**7.** Según un estudio de una tienda comercial, la probabilidad de que un cliente compre es 20 % mayor en la tarde que en la mañana. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto al informe?

**A.** El 20 % de las ventas se realizan en la tarde.

**B.** Es más probable que un cliente compre en la tarde que en la mañana.

**C.** El 80 % de los clientes de la mañana no compran en la tienda.

**D.** Solo el 20 % de los clientes de la tarde compra.

**8.** Un estudio del centro de sismología informó que la probabilidad de que ocurra un temblor durante el día es de 75 %. Además, el 5 % de ellos supera los 4 grados Richter. ¿Cuál es la probabilidad de que el temblor suceda de día y supere los 4 grados?

**A.** 0,0375

**B.** 0,0475

**C.** 0,05

**D.** 0,08

**9.** Según un estudio, las personas que consumen una dieta alta en proteínas, en especial pescado, tienen 20 % menos de probabilidades de sufrir un accidente cerebrovascular. Al respecto, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

**A.** La probabilidad que una persona tiene de sufrir un accidente cerebrovascular es 20 %.

**B.** Las personas que no comen pescado tienen mayor probabilidad de padecer un accidente cerebrovascular.

**C.** La probabilidad de sufrir un accidente cerebrovascular para una persona que come pescado es de 80 %.

**D.** Un 20 % de la población no come pescado a menudo.

**10.** La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es de 0,1. La probabilidad de que suene en el caso de un accidente es de 0,97. Además, la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es de 0,02. Entonces, es correcto afirmar que:

**A.** La mayor parte de las fábricas no tienen alarma.

**B.** La mayor parte de las alarmas no suenan en caso de accidente.

**C.** El 90 % de las fábricas con alarma no tienen accidentes.

**D.** El 99 % de las alarmas suenan.

# Unidad 1: Números

## Lección 1

### Página 4

**1.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | × | × | ✓ | × | ✓ |
| | × | × | ✓ | × | ✓ |
| | ✓ | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| | × | × | × | ✓ | ✓ |
| | × | ✓ | ✓ | × | ✓ |

**2.** Respuesta variada, por ejemplo:

- **a.** Naturales: son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto. Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5,….
- **b.** Enteros: son los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. Por ejemplo: …, −2, −1, 0, 1, 2,…
- **c.** Racionales: son aquellos que se pueden representar por medio de fracciones. Ej. 0,3; 1/2…
- **d.** Irracionales: son aquellos que NO se pueden representar a través de una fracción.
- **e.** Reales: son aquellos que incluyen a los números naturales, enteros, racionales e irracionales.

**3.**

**a.** – **b.** X **c.** – **d.** – **e.** – **f.** –

**4.**

- **a.** Verdadero, los racionales incluye a los números enteros.
- **b.** Falso, la diferencia puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo $\sqrt{2}-(1+\sqrt{2}) = 1$ donde 1 es un número racional.
- **c.** Verdadero, el resultado es un racional.

### Página 5

**1.**

**a.** $3\sqrt{6}$ **c.** $9\sqrt{2}$ **e.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

**b.** $-6\sqrt{5}$ **d.** $-\frac{\sqrt{3}}{30}$ **f.** $\sqrt{5}$

**2.**

**a.** 8 **c.** $-5\sqrt{10}$ **e.** $-\frac{2}{5}$

**b.** $\frac{6}{5}$ **d.** 20 **f.** $\frac{3}{4}$

**3.**

- **a.** Clausura: No siempre se cumple. Por ejemplo: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$, donde 2 es un número racional.
- **b.** Conmutatividad: Se cumple. Por ejemplo: $\pi\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot\pi$.
- **c.** Asociatividad: Se cumple. Por ejemplo: $(\pi\cdot\sqrt{2})\cdot e = \pi\cdot(\sqrt{2}\cdot e)$
- **d.** Elemento neutro: Se cumple. Por ejemplo $\pi\cdot 1 = 1\cdot\pi = \pi$
- **e.** Elemento inverso: Se cumple. Por ejemplo: $\pi\cdot\frac{1}{\pi} = 1$.

### Página 6

**4.**

**a.** $8\sqrt{2}$ **c.** $9{,}3\sqrt{5}$

**b.** $-5{,}9\sqrt{3}$ **d.** $-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$

**5.**

**a.** $ab$ **d.** $ab^2$ **g.** $a^3b^2$ **j.** $b^3c$

**b.** $bc$ **e.** $(ac)^2$ **h.** $\frac{cb^2}{a^2}$ **k.** $\frac{ab^2}{c}$

**c.** $(ac)^2$ **f.** $a^5b$ **i.** $a^2bc$ **l.** $\frac{b}{a}$

### Página 7

**6.**

- **a.** No se cumple, para poder eliminar la raíz de $b$ este debería estar elevado al cuadrado.
- **b.** Se cumple, es la propiedad de la multiplicación de raíces.
- **c.** No se cumple, el cuadrado de binomio está mal desarrollado (falta un 2 acompañando al término de la raíz).

**7.** El primer error se encuentra en la distribución de la raíz de 2 con el segundo término $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{14}$ y el segundo error está en la suma de raíces $\sqrt{6}+\sqrt{9} \neq \sqrt{6\cdot 9}$.

**8.**

- **a.** Notemos que el segmento AE divide en la mitad al segmento DB, entonces DE = EB = 3,5. Además el triángulo DAB es isósceles por lo que $AD = AB = \sqrt{3}$. Por otro lado, los triángulos ABE, AED, DEC y BEC son rectángulos con DEC = BEC, consideremos el triángulo DEC donde la hipotenusa esta dado por $\frac{\sqrt{373}}{2}$. Por lo tanto, el perímetro del rombo ADCB.
- **b.** Notemos que el segmento CD divide en la mitad al segmento AB, entonces AD = DB = 6. Luego, consideremos el triángulo ADC donde su hipotenusa AC es $6\sqrt{2}$. Por otra parte, el triángulo ABC es isósceles por lo que $BC = 6\sqrt{2}$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo ABC es $P_{ABC} = 2\cdot 6\sqrt{2}+12 = 12(1+\sqrt{2})$.

**9.** Respuesta variable, por ejemplo: No es posible realizar la operación, los dos radicales poseen el mismo índice 2 pero sus bases son diferentes, además son números primos por lo que no podemos factorizar.

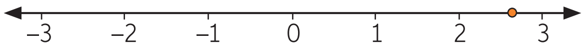
**10.** Respuesta variable, por ejemplo: La igualdad se cumple en los casos que $p > 0$ y $q = 0$, $p = 0$ y $q > 0$ o $p = q = 0$.

**11.** Respuesta variable.

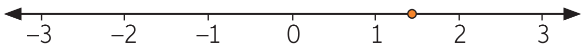
Página 8

**1.**

**a.** $\sqrt{7}$




**b.** $\sqrt{2}$




**2.**

**a.** $<$ **c.** $<$ **e.** $<$

**b.** $>$ **d.** $<$ **f.** $<$

**3.** Respuesta variada, dependiendo de las cotas utilizadas, por ejemplo:

**a.** 2,449 **c.** 4,472 **e.** –8,944

**b.** –3,162 **d.** 2,236 **f.** 0,28

Página 9

**1.**

**a.** 51,96 **b.** 7,48 **c.** 0,29 **d.** 4,24

**2.** Cada lado mide $15\sqrt{2}$ cm.

**3.**

**a.** $\sqrt{5}$

**b.** $\sqrt{2} + 1$

## Antes de continuar

Página 10

**1.** B **5.** A **9.** A

**2.** D **6.** B **10.** C

**3.** B **7.** B

**4.** B **8.** B

Página 11

**11.** B **14.** A **17.** B

**12.** C **15.** C **18.** C

**13.** C **16.** C **19.** A

## Lección 2

Página 12

**1.**

**a.** 9 **e.** 0,2 **i.** 6

**b.** 4 **f.** 0,2 **j.** –6

**c.** $\sqrt[3]{9}$ **g.** $-\frac{2\sqrt[3]{3}}{5}$ **k.** 1,8

**d.** $4\sqrt[3]{5}$ **h.** 7 **l.** 6

**2.**

**a.** $\sqrt[4]{2^4\cdot 5} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$

Propiedades: multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**b.** $\sqrt[3]{\frac{24}{125}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3\cdot 3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{5}$

Propiedades: división y multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**c.** $\sqrt[4]{\frac{768}{243}} = \frac{\sqrt[4]{768}}{\sqrt[4]{243}} = \frac{\sqrt[4]{2^4\cdot 3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{4}{3}$

Propiedades: división y multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**d.** $\sqrt[5]{2^5\cdot 30} = 2\cdot\sqrt[5]{30}$

Propiedades: multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**e.** $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[4]{80}} = \frac{\sqrt[3]{5^3\cdot 6}}{\sqrt[4]{2^4\cdot 5}} = \frac{5\sqrt[3]{6}}{2\sqrt[4]{5}}$

Propiedades: multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**f.** $\sqrt[3]{\frac{108}{128}} = \frac{\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}}{\sqrt[3]{2^7}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

Propiedades: división y multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**g.** $\sqrt[4]{7^4\cdot 2^2} = 7\sqrt{2}$

Propiedades: multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**h.** $\frac{\sqrt[5]{3^5\cdot 2}}{\sqrt[3]{2^6\cdot 3}} = \frac{3\sqrt[5]{2}}{2\sqrt[6]{3}}$

Propiedades: multiplicación de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

**i.** $\sqrt[4]{\frac{3^4}{10^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{10^4}} = \frac{3}{10}$

Propiedades: división de raíces de igual índice y raíz de una potencia.

Página 13

**3.**

**a.** No **d.** Si, $\mathbb{Q}$.

**b.** Si, $\mathbb{Q}^*$. **e.** Si, $\mathbb{Q}$.

**c.** Si, $\mathbb{Q}$. **f.** No.

**4.**

- **a.** Falso, la raíz cúbica es $-10$.
- **b.** Falso, la raíz de 64 es 8.
- **c.** Falso, la raíz sexta de $-64$ no es real.
- **d.** Falso, la raíz cúbica de 8 es 2.
- **e.** Verdadera.
- **f.** Falso, $\sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$.
- **g.** Verdadero.

### Página 14

**1.**

- **a.** $3^{\frac{1}{2}}$
- **b.** $16^{\frac{1}{2}}$
- **c.** $18^{\frac{1}{6}}$
- **d.** $18^{\frac{1}{6}}$
- **e.** $0,125^{\frac{1}{3}}$
- **f.** $(0,\overline{1})^{\frac{1}{8}}$
- **g.** $3^{\frac{1}{9}}$
- **h.** $\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{8}}}$
- **i.** $45^{\frac{1}{15}}$
- **j.** $32^{\frac{3}{6}}$
- **k.** $2^5$
- **l.** $2^{\frac{2}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{9}}$

**2.**

- **a.** $\sqrt{5}$
- **b.** $\sqrt{14^{-3}}$
- **c.** $\sqrt[20]{\frac{2}{9}}$
- **d.** $12\sqrt{3}$
- **e.** $\sqrt[3]{-27^{-1}}$
- **f.** $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$
- **g.** $\sqrt[16]{24}$
- **h.** $\sqrt[4]{\frac{5}{8}}$
- **i.** $\sqrt[4]{81^{-1}}$

### Página 15

**3.**

- **a.** 8
- **b.** 2
- **c.** $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}$
- **d.** $-6\sqrt[3]{5}$
- **e.** 6
- **f.** $-\sqrt[3]{514}$
- **g.** $\dfrac{-4\sqrt[3]{5}}{3}$
- **h.** $\dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2}$

**4.**

- **a.** *Incorrecto.*
- **b.** *Incorrecto.*
- **c.** *Correcto.*
- **d.** *Incorrecto.*

### Página 16

**1.**

- **a.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
- **b.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$
- **c.** $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{3}$
- **d.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
- **e.** $\sqrt[3]{3}$
- **f.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
- **g.** $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{5}$
- **h.** $\dfrac{7}{6}$
- **i.** $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{36}$
- **j.** $-3\sqrt[5]{3}\sqrt[4]{2^3}$
- **k.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$
- **l.** $\dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{6}$
- **m.** $3(2+\sqrt{3})$
- **n.** $-\dfrac{23(\sqrt{5}+3)}{4}$
- **o.** $5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
- **p.** $-\dfrac{(\sqrt{5}-6)}{31}$
- **q.** $\dfrac{5\sqrt{5}(2\sqrt{3}+1)}{11}$
- **r.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

### Página 17

**2.**

- $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$
- $3-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
- $-\dfrac{7(\sqrt{2}+7)}{47}$
- $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$
- $\dfrac{1}{6}(-1-3\sqrt{2}+9\sqrt{3})$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1$
- $-\dfrac{(1+2\sqrt{7})}{9}-\dfrac{5}{3}(2+\sqrt{7})$

**3.**

- **a.** Falso, para racionalizar es necesario multiplicar el numerador y denominador  por la raíz a eliminar.
- **b.** Falso. La expresión es siempre equivalente.
- **c.** Verdadera.
- **d.** Falso, el término debe ser $\dfrac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$.
- **e.** Falso, debe ser positivo, de lo contrario $\sqrt{b} \notin \mathbb{R}$.
- **f.** Falso, podemos racionalizar dentro del cuadrado por $\left(\dfrac{7+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}\right)^2$.

## Antes de continuar

### Página 18

| | | |
|---|---|---|
| **1.** C | **4.** D | **7.** D |
| **2.** B | **5.** B | **8.** C |
| **3.** C | **6.** C | **9.** C |

### Página 19

| | | |
|---|---|---|
| **10.** C | **13.** B | **16.** C |
| **11.** A | **14.** D | **17.** B |
| **12.** A | **15.** C | **18.** D |

## Lección 3

### Página 20

**1.**

- **a.** $\log_2 \frac{1}{2} = -1$
- **b.** $\log_{100} \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$
- **c.** $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
- **d.** $\log_{121} 11 = \frac{1}{2}$
- **e.** $\log_{\frac{1}{8}} 512 = -3$
- **f.** $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$
- **g.** $\log_{\frac{4}{49}} \frac{343}{8} = -\frac{3}{2}$
- **h.** $\log_{0,1} 100 = -2$
- **i.** $\log_2 16 = \frac{12}{3}$
- **j.** $\log_{\frac{100}{121}} \frac{11}{10} = -\frac{1}{2}$
- **k.** $\log_{\frac{3}{12}} \frac{1}{256} = \frac{12}{3}$
- **l.** $\log_{0,0049} 0,07 = -\frac{1}{2}$

**2.**

**a.** $2^1 = 2$

**b.** $(\sqrt{2})^2 = 2$

**c.** $10^3 = 1000$

**d.** $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

**e.** $3^2 = 9$

**f.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

**g.** $2{,}2^0 = 1$

**h.** $81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$

**i.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

**j.** $10^{-3} = 0{,}001$

**k.** $3^2 = 3^2$

**l.** $0{,}01^{-1} = 100$

## Página 21

**3.**

**a.** Se debe expresar como $\log_{10} a = b$ o la potencia debería ser $a^b = 10$.

**b.** Se debe expresar como $\log_5 a = 4$ o la potencia debería ser $5^a = 4$.

**c.** Se debe expresar como $\log_{0,1} 100 = -2$.

**d.** $Log_{0,5} 0,25 = 2 \Leftrightarrow (0,5)^2 = 0,25$

**4.**

**a.** Verdadera.

**b.** Falso, $1^0 = 1$ siempre.

**c.** Falso, el logaritmo de base de *a* no es equivalente al logaritmo de base *a* de 10.

**d.** Verdadera.

**e.** Falsa, a es un real positivo, pero b además de ser un real positivo, debe ser distinto de 1.

**5.**

**a.** $3^a = 9$ entonces a = 2

**b.** $9^a = 3$ entonces $a = \frac{1}{2}$

**c.** $2^4 = a$entonces a = 16

**d.** $3^{-2} = a$ entonces $a = \frac{1}{9}$

## Página 22

**1.**

**a.** $\frac{\log 2021}{\log 2021} = 1$

**b.** $\frac{\log 1}{\log 2021} = 0$

**c.** $0 + 0 + \frac{\log 1}{\log 2} = 0$

**d.** $\frac{\log 1}{\log 2} + \frac{\log 2}{\log 2} + \frac{\log 1}{\log 3} = 1$

**e.** $3 \ln e - \left(\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} + 1\right) = 1$

**f.** $\frac{\log 1}{\log 0,02} + \frac{\log \frac{1}{50}}{\log 0,02} = 1$

**g.** $\frac{\log 0,\overline{3}}{\log \frac{1}{3}} - \frac{\log \sqrt{2}\sqrt{3}}{\log \sqrt{6}} = 0$

**h.** $\frac{\log 3\sqrt{2}}{\log \sqrt{18}} = 1$

**i.** $\log_{\sqrt{2}}(5\sqrt{2}) = 2\log_2 5 + 1$

**j.** $\frac{\log \frac{5}{2}}{\log 2,5} + \frac{\log 0,4}{\log \frac{2}{5}} = 2$

**k.** $\frac{\log 1 + \sqrt{2}}{\log 1 + \sqrt{2}} = 1$

**l.** $\log(\sqrt{18} - 3\sqrt{2} + 1) = 0$

**2.**

**a.** Falso, a debe ser un real positivo.

**b.** Falso, $\log_a 1 = 0$.

**c.** Verdadera.

**d.** Verdadera

**e.** Falso, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

## Página 23

**3.**

**a.** $\log_2 2 + \log_2 8 = 4$

**b.** $\log_2 2^6 = 6$

**c.** $\log_3 81 + \log_3 27 = 7$

**d.** $\log_5 5^{13} = 13$

**e.** $\log_2 64 + \log_2 16 + \log_2 4 = 12$

**f.** $\log_5 5^{-2} = -2$

**g.** $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

**h.** $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

**i.** $\log_{0,5} 2^2 = \frac{\log 4}{\log_{0,5}} = -2$

**j.** $\frac{\log 3\sqrt[3]{3}}{\log \frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}$

**k.** $\log_3 \sqrt{3} + \log_3 3^{-2} = -\frac{3}{2}$

**l.** $\log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

**m.**$\log 1^2 = 0$

### Página 24

**4.**

**a.** $\log\left(\frac{2\cdot 3}{6}\right)$ **b.** $\log\frac{3^2}{6}$ **c.** $\log\frac{2^2\cdot 6}{3}$

**5.**

**a.** $P-Q+R$

**b.** $\frac{Q+2P-R}{\log 3}$

**c.** $\frac{2Q}{P}$

**d.** $P+2Q+2R$

**e.** $\frac{3P-Q}{R}$

**f.** $\frac{3P}{\log 3+Q}$

**6.**

**a.** Sea $x>0$, entonces,

$$\begin{aligned}10^{\log x} &= x\\ \log(10^{\log x}) &= \log x\\ \log x\cdot\log 10 &= \log x\\ \log x\cdot 1 &= \log x\\ \log x &= \log x\\ x &= x\end{aligned}$$

**b.** $\log(a^{\log a}) = \log a\cdot\log a = (\log a)^2$

$\log_a\frac{1}{b} = \log_a 1-\log_a b$

**c.** $= -\log_a b$

$= -\frac{\log_c b}{\log_c a}$

**7.** Respuesta variable. Por ejemplo,

- $\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9\log_2 2 = 9\cdot 1 = 9$
- $\log_3 19683 = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9\cdot 1 = 9$

### Página 25

**1.**

**a.**

- $a\approx 10^{0{,}272}$
- $a\approx 10^{0{,}229}$
- $a\approx 10^{0{,}282}$
- $a\approx 10^{0{,}198}$

**b.** $a\approx 10^{-0{,}543}$

**c.** $a\approx 10^{0{,}591}$

**2.**

**a.** Ácido, $H^+ = 10^{-2{,}3}$

**b.** Ácido, $H^+ = 10^{-2{,}5}$

**c.** Base, pH = 10

### Página 26

**d.** Ácido, pH = 6

**e.** Ácido, pH = 5,6

**f.** Base y ácido, pH = 7,5 y 6

**g.** Ácido, $H^+ = 10^{-5{,}1}$y $10^{-5{,}6}$

**h.** Ácido, pH = 3,5 y 4,7

**i.** Ácido, pH = 6 y 6,7

**3.**

**a.** El pH varía entre 0 y 14.

**b.** La concentración es $H^+ = 10^{-7}$

**c.** $pH = \log(H^+)^{-1}$

**d.** $\log H^+ = \frac{\log_{H^+} H^+}{\log_{H^+} 10} = (\log_{H^+} 10)^{-1}$ entonces

$pH = -(\log_{H^+} 10)^{-1}$

**4.** Deben transcurrir aproximadamente 1,3 periodos.

### Página 27

**5.**

**a.** $\beta = 100$ y 120 dB.

**b.** $I = 10^{-\frac{9}{2}}\frac{w}{m^2}$

**c.** $\beta = 95$ y 100 dB.

**d.** $\beta = 110$ y 90 dB.

**e.** $\beta = 20$

**f.** $I = 10^{11}\frac{w}{m^2}$

**6.** Respuestas variadas, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\beta &= 10\log I + 120\log 10\\ &= \log I^{10} + \log 10^{120}\\ &= \log(I^{10}\cdot 10^{120})\end{aligned}$$

## Antes de continuar

### Página 28

| | | |
|---|---|---|
| **1.** B | **4.** A | **7.** A |
| **2.** B | **5.** C | **8.** A |
| **3.** C | **6.** B | **9.** C |

### Página 29

| | | |
|---|---|---|
| **10.** B | **14.** C | **18.** D |
| **11.** A | **15.** A | **19.** D |
| **12.** D | **16.** B | **20.** B |
| **13.** C | **17.** D | |

# Unidad 2: Álgebra

## Lección 4

### Página 30

**1.**

**a.** El valor del dólar aumentó en un 7 %.

**b.** En enero su valor era de 822,43 pesos chilenos.

**c.** Si se mantiene el índice de variación,el valor en marzo sería de 941,6 pesos chilenos.

**d.** Si el $I_v$ varía, el valor en marzo sería de 906,4 pesos chilenos.

**e.** Si el $I_v$ varía, el valor en marzo sería de 959,2 pesos chilenos.

**f.** Para que el dólar tenga ese precio, el $I_v$ debe disminuir en 0,147 aproximadamente.

**2.**

**a.** $m(t) \cdot 0,97 = m(t+1)$

**b.** $d(t) \cdot 1,3 = d(t+1)$

**c.** $s(t) \cdot 1,0001 = s(t+1)$

**d.** $v(t) \cdot 1,03 = v(t+1)$

### Página 31

**e.** $I(t) \cdot 0,84 = I(t+1)$ **f.** $j(t) \cdot 1,2 = j(t+1)$

**3.**

**a.** $\frac{209}{229} = 0,91$

**b.** $\frac{204}{209} = 0,98$

**c.** $\frac{205}{204} = 1,005$

**d.** $\frac{224}{205} = 1,092$

**e.** $\frac{205}{209} = 0,98$

**f.** $\frac{224}{204} = 1,098$

**g.** Esto quiere decir que los valores entre ambos años son bastante cercanos.

**h.** La cantidad de películas será mayor que en 2018 ya que el indice de variación aumenta.

**i.** Respuesta variable, por ejemplo: El índice de variación es 1,02.

### Página 32

**4.**

**a.** $\frac{435}{457} = 0,95$

**b.** $\frac{406}{435} = 0,93$

**c.** $\frac{409}{406} = 1,007$

**d.** $\frac{382}{409} = 0,93$

**e.** $\frac{382}{457} = 0,84$

**f.** $\frac{409}{435} = 0,94$

**g.** Entre 2014 y 2016, y luego entre 2017 y 2018. Esto significa que en esos años disminuye la cantidad de bibiliotecas públicas con acceso a internet.

**h.** Respuesta variable, por ejemplo, el acceso a internet aumenta con el paso de los años, sin embargo, disminuye la demanda de bibliotecas públicas.

**5.**

**a.** Verdadera.

**b.** Falsa. La expresión correcta es $b(t+1) = 1,003 \cdot b(t)$

**c.** Verdadera.

**d.** Falsa. Indica el crecimiento o decrecimiento de una variable.

### Página 33

**6.**

**a.** Significa que disminuye su valor.

**b.** En dos años su valor será de \$203 930.

**c.** El índice de variación es positivo pero menor a 1.

**d.** Aproximadamente en 205 años la consola no tendrá valor.

**e.** Significa que en cada periodo de tiempo, el valor de la pintura aumenta en un 20 %.

**f.** En cuatro trimestres su valor será de 207,4 USD.

**g.** En tres años la pintura valdrá 891,6 USD.

**h.** Cada trimestre la pintura aumenta su valor en un 20 %.

**7.**

**a.** El *Iv* entre los años 1 y 5 es $\frac{1}{5} = 0,2$ .

**b.** El *Iv* entre los años 1 y 5 es $\frac{4}{3} = 1,3$ .

### Página 34

**1.**

**a.** $r(t) = 1 \cdot (1,03)^t$

**b.** $c(t) = 90000 \cdot (0,94)^t$

**c.** $r(t) = 5 \cdot (1,04)^t$

**d.** $v(t) = 4 \cdot (1,001)^t$

**e.** $b(t) = 3 \cdot (2,3)^t$

**f.** $g(t) = 80 \cdot (0,98)^t$

**2.**

**a.** No, ya que el cambio en dos periodos de tiempo consecutivo no es el mismo.

**b.** Sí, el índice de variación es 2 y la cantidad inicial 1200.

**c.** No, ya que el cambio en dos periodos de tiempo consecutivo no es el mismo.

**d.** Sí, la cantidad inicial es 1 y el índice de variación es 0,98.

**e.** No, el cambio en dos periodos de tiempo consecutivo no es el mismo.

**f.** No, ya que el cambio en dos periodos de tiempo consecutivo no es el mismo.

**g.** Sí, la cantidad inicial es 4 y el índice de variación es 2.

**h.** Sí, la cantidad inicial es m(0) y el índice de variación es 3.

**i.** No, ya que el cambio en dos periodos de tiempo consecutivo no es el mismo.

**Página 35**

**3.**

**a.** El valor de r es 0,01. Representa el porcentaje en que se desgantan sus zapatillas.

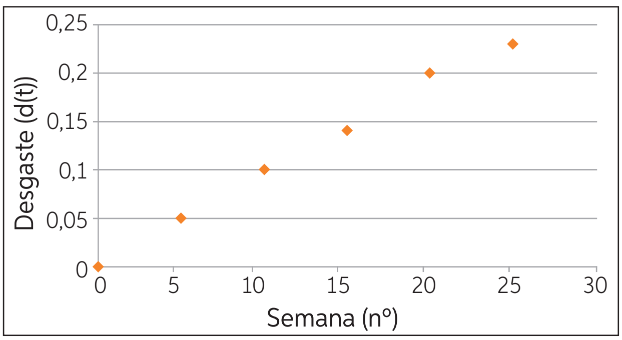
**b.** El valor de A es 1, representa el desgaste inicial de las zapatillas.

**c.** El desgaste total de las zapatillas después de 3 meses (12 semanas) es de 12 %.

**d.** En aproximadamente 91 semanas se debe comprar zapatillas nuevas.

**e.**

| *Semana (nº)* | *Desgaste (d(t))* |
|---|---|
| *0* | - |
| *5* | 0,05 |
| *10* | 0,1 |
| *15* | 0,14 |
| *20* | 0,18 |
| *25* | 0,22 |




**f.** Los modelos son $d(t) = (0,97)^t$ y $d(t) = (0,98)^t$.

**g.** En 30 semanas el primer par y en 45 el segundo.

**h.** Son más convenientes las zapatillas que se desgastan al 1% semanal.

**Página 36**

**4.**

**a.** Verdadera.

**b.** Falsa. En tal caso, su índice de variación es menor que 1, pero positivo.

**c.** Falso. En tal caso su índice de varación es mayor que 1.

**d.** Falso. La expresión indica que el cambio porcentual disminuye en un 4 % en función del tiempo transcurrido.

**5.**

**a.** $m(t) = A \cdot (1 - 0,05)^t$ donde A es el porcentaje de motivación inicial.

**b.** Su porcentaje de motivación es 43,2 %.

**c.** Su porcentaje de motivación es 59 %.

**Página 37**

**6.**

**a.** El depósito inicial es de $1 000 000.

**b.** Recibe un interés de 0,2 %.

**c.** El monto en su cuenta es $1 024 265.

**d.** Laura habrá duplicado su inversión en aproximadamente 86 años.

**7.**

**a.** $h(t) = 10 \cdot (1,1)^t$

**b.** Después de 3 años su altura será $10 \cdot (1,1)^6 = 17,7$ cm.

**c.** En aproximadamente 25 semestres medirá más de un metro.

**d.** Habrá que podar la planta dentro de 29 semestres.

**8.**

**a.** En esta década el valor es de $350.

**b.** Hace 10 años el valor del combustible era de $200.

## Antes de continuar

**Página 38**

**1.** B

**2.** D

**3.** D

**4.** A

**5.** C

**6.** B

**Página 39**

**7.** A

**8.** D

**9.** A

**10.** A

**11.** B

**12.** C

**13.** A

# Lección 5

## Página 40

**1.**

**a.**

- Sí
- $a = 1$
- $b = 0$
- $c = -1$

**b.**

- Sí
- $a = 1$
- $b = -2$
- $c = -1$

**c.**

- No

**d.**

- Sí
- $a = -1$
- $b = \frac{1}{2}$
- $c = \frac{1}{2}$

**e.**

- No

**f.**

- No

**g.**

- No

**h.**

- Sí
- $a = 2$
- $b = 1 - \sqrt{2}$
- $c = -1$

**i.**

- Si
- $a = 2$
- $b = -2$
- $c = 0$

**j.**

- No

**k.**

- Sí
- $a = 1$
- $b = 2$
- $c = 0$

**l.**

- Sí
- $a = 1$
- $b = 1$
- $c = -1$

**2.**

**a.** $6x^2 - 216 = 0$

**b.** $2x^2 + 5x - 62 = 0$

**c.** $4x^2 + 6x - 15 = 0$

**d.** $2x^2 + 4x - 30 = 0$

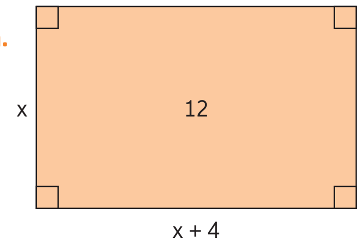
**e.** $2(4x^2 - 121) = 0$

**f.** $\pi(x^2 + 4x - 12) = 0$

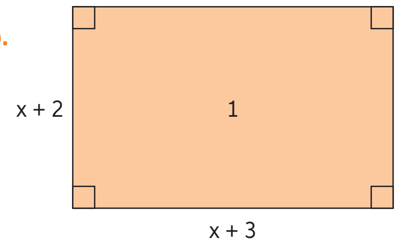
## Página 41

**3.**

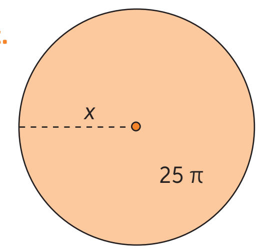
**a.**



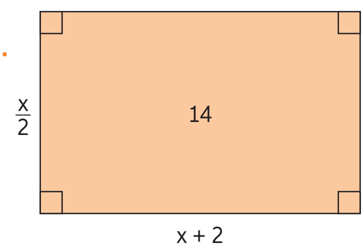

**b.**



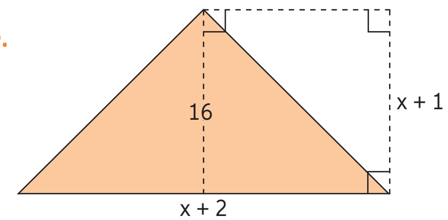

**c.**




**d.**




**e.**




**4.** Respuesta variable, por ejemplo: No, ya que puede variar según la factorización que se haga de la ecuación correspondiente.

**5.**

**a.**
- Sí.
- Sí.

**b.**
- Sí.
- Sí.

**c.**
- Sí.
- No.

**d.**
- Sí.
- Sí.

**e.**
- No.
- No.

**f.**
- Sí.
- Sí.

**Página 42**

**6.**

**a.** F, a debe ser un número real distinto de cero.

**b.** F, la ecuación sigue siendo cuadrática ya que tiene el término $x^2$.

**c.** V.

**d.** F, puede tener dos soluciones que no pertenecen a los números reales.

**e.** V.

**f.** F, puede ser negativo pero idealmente la ecuación se expresa con el término positivo.

**g.** F, también pueden ser iguales.

**h.** V.

**i.** V.

**j.** F, la raíz de la ecuación es solo $x = -1$.

**k.** V.

**Página 43**

**7.**

**a.** $x^2 - 36 = 0$

**b.** $\sqrt{2}x$, $2x$, $2\sqrt{2}x$ y $4x$.

**c.** $4x^2 - 144 = 0$

**d.** $x = 6$

**8.**

**a.** $v^2 - 1 = 0$, a = 1, b = 0, c = −1

**b.** $2v^2 - 5 = 0$, a = 2, b = 0, c = −5

**c.** $\sqrt{2}v^2 - 2\sqrt{3} = 0, a = \sqrt{2}, b = 0, c = -2\sqrt{3}$

**Página 44**

**1.**

**a.** $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$

**b.** $x_1 = -3$ y $x_2 = 0$

**c.** $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

**d.** $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$

**e.** $x_1 = 1$ y $x_2 = -5$

**f.** $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$

**2.**

**a.** $3x(x-9) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = 9$

**b.** $64x(x-2) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

**c.** $\sqrt{2}x(x+2) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = -2$

**d.** $5x(25x-1) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{25}$

**e.** $6x(36x-1) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{36}$

**f.** $\sqrt{2}x(1-\sqrt{3}x) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**g.** $2\sqrt{3}x(x+1) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = -1$

**h.** $\frac{1}{16}x(8x-1) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{8}$

**i.** $\sqrt{2}x(x-2) = 0; x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

**3.** Respuesta variables.

**a.** $x(x-2) = 0$

**b.** $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1) = 0$

**c.** $(x+1)(x-1) = 0$

**Página 45**

**4.**

**a.** $(x+2)^2 = 0; x_{1,2} = -2$

**b.** $(2x+1)^2 = 0; x_{1,2} = -\frac{1}{2}$

**c.** $(x-3)^2 = 0; x_{1,2} = 3$

**d.** $(7x+1)^2 = 0; x_{1,2} = \frac{1}{7}$

**e.** $(3x-2)^2 = 0; x_{1,2} = \frac{2}{3}$

**f.** $(1-4x)^2 = 0; x_{1,2} = \frac{1}{4}$

**g.** $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = 0; x_{1,2} = \frac{1}{2}$

**h.** $\left(3x - \frac{1}{3}x\right)^2 = 0; x_{1,2} = \frac{1}{9}$

**i.** $(x-\sqrt{2})^2 = 0; x_{1,2} = \sqrt{2}$

**5.**

**a.** $(x-3)(x+3) = 0; x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

**b.** $(x-2021)(x+2021) = 0; x_1 = 2021$ y $x_2 = -2021$

**c.** $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0; x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$

**d.** $(20x-21)(20x+21) = 0; x_1 = \frac{21}{20}$ y $x_2 = -\frac{21}{20}$

**e.** $(1-x)(1+x) = 0; x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

**f.** $(7-2x)(7+2x) = 0; x_1 = \frac{7}{2}$ y $x_2 = -\frac{7}{2}$

**g.** $(3-\sqrt{2}x)(3+\sqrt{2}x) = 0; x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ y $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**h.** $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0; x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

**i.** $\left(x - \sqrt[4]{2^3}\right)\left(x + \sqrt[4]{2^3}\right) = 0; x_1 = \sqrt[4]{2^3}$ y $x_2 = -\sqrt[4]{2^3}$

## Página 46

**6.**

a. $(2x+1)(3x+2) = 0;$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$

b. $2(x-5)(x+1) = 0;$

$x_1 = 5$ y $x_2 = -1$

c. $(3x-1)(5x+1) = 0;$

$x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{5}$

d. $4(x-4)^2 = 0;$

$x_1 = 4$ y $x_2 = 4$

e. $(3x+1)^2 = 0;$

$x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$

f. $(x-9)(x+1) = 0;$

$x_1 = 9$ y $x_2 = -1$

g. $(x+4)(x+3) = 0;$

$x_1 = -4$ y $x_2 = -3$

h. $(x+1)(2x+1) = 0;$

$x_1 = -1$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

i. $-(3x-1)^2 = 0;$

$x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

**7.**

a. $(x-2)(x+2) = 0;$

$x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

b. $\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right) = 0;$

$x_1 = 6$ y $x_2 = -6$

c. $x(3x+1) = 0;$

$x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$

d. $4x(32x-1) = 0;$

$x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{32}$

e. $(x-7)^2 = 0; x_{1,2} = 7$

f. $(x-1)(3x+2) = 0;$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$

g. $(x-4)(x+4) = 0;$

$x_1 = 4$ y $x_2 = -4$

h. $(x-2)(x-4) = 0;$

$x_1 = 2$ y $x_2 = 4$

i. $x(10x-9) = 0;$

$x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{9}{10}$

## Página 47

**8.**

a. F, su otra raíz es $x_2 = -a$.
b. V.
c. F, el termino común debe depender de x para tener una raíz igual a cero.
d. V.
e. V.
f. F, se puede factorizar como $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$.
g. V.
h. F, las soluciones son 3 y −1.

## Página 48

**1.**

a. $b = 8; x = -4.$
b. $c = 1; x = -1.$
c. $a = 3; x = -1.$
d. $c = \frac{1}{2}; x = -1.$
e. $b = 1; x = -\frac{1}{2}.$
f. $b = 2\sqrt{3}; x = -\sqrt{3}.$
g. $c = \frac{81}{4}; x = -\frac{9}{2}.$
h. $c = \frac{4}{9}; x = -\frac{2}{3}.$
i. $c = \frac{25}{16}; x = -\frac{5}{8}.$

**2.**

a. $(x+2)^2 - 3^2 = 0;$
$x_1 = 1$ y $x_2 = -5$

b. $(x+3)^2 - 4^2 = 0;$
$x_1 = 1$ y $x_2 = -7$

c. $(x-4)^2 - 10^2 = 0;$
$x_1 = 14$ y $x_2 = -6$

d. $(x-6)^2 - 5^2 = 0;$
$x_1 = 1$ y $x_2 = 11$

## Página 49

e. $(x+5)^2 - 2^2 = 0;$
$x_1 = -3$ y $x_2 = -7$

f. $(x-5)^2 - 2^2 = 0;$
$x_1 = 3$ y $x_2 = 7$

g. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0;$
$x_1 = -2$ y $x_2 = \frac{2}{3}$

h. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 0;$
$x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{5}{3}$

**3.**

a. $(x+2)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$

$((x+2)-\sqrt{7})((x+2)+\sqrt{7}) = 0$

$x_1 = -2+\sqrt{7}; x_2 = -2-\sqrt{7}$

b. $(3x+1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$((3x+1)-\sqrt{3})((3x+1)+\sqrt{3}) = 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{3}$

c. $(3x+5)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = 0$

$\left((3x+5)-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left((3x+5)+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0$

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{\frac{1}{3}}}{3}; x_2 = \frac{-5-\sqrt{\frac{1}{3}}}{3}$

d. $(1-x)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

$\left((1-x)-\sqrt[4]{2}\right)\left((1-x)+\sqrt[4]{2}\right) = 0$

$x_1 = 1-\sqrt[4]{2}; x_2 = 1+\sqrt[4]{2}$

## Página 50

e. $(x+1)^2 - 6 = 0$

$(x+1)^2 - (\sqrt{6})^2 = 0$

$((x+1)-\sqrt{6})((x+1)+\sqrt{6}) = 0$

$x_1 = -1+\sqrt{6}; x_2 = -1-\sqrt{6}$

f. $(x-1)^2 - 11 = 0$

$(x-1)^2 - (\sqrt{11})^2 = 0$

$$((x-1)-\sqrt{11})((x-1)+\sqrt{11}) = 0$$
$$x_1 = 1+\sqrt{11};x_2 = 1-\sqrt{11}$$

**g.** $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8} = 0$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = 0$$
$$\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)+\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{4};x_2 = \frac{-\sqrt{2}+1}{4}$$

**h.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2 = 0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(\sqrt{2})^2 = 0$$
$$\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{2}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\right) = 0$$
$$x_1 = \sqrt{2}-\frac{1}{2};x_2 = -\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

**i.** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{14}{9} = 0$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{14}{9}}\right)^2 = 0$$
$$\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)-\sqrt{\frac{14}{9}}\right)\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{\frac{14}{9}}\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{\sqrt{14}+1}{3};x_2 = \frac{-\sqrt{14}+1}{3}$$

**j.** $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{5} = 0$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2 = 0$$
$$\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)+\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}-2}{5};x_2 = \frac{-2\sqrt{5}-2}{5}$$

**k.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{7}}{4} = 0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2 = 0$$
$$\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{\sqrt[4]{7}-1}{2};x_2 = \frac{-\sqrt[4]{7}-1}{2}$$

**l.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8} = 0$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = 0$$
$$\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = 0$$
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{2};x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{2}$$

**4.**

**a.** La ecuación es $x^2+2x-14 = 0$. La medida del lado mayor es $\sqrt{15}-1$ cm.

**b.** La medida de los catetos son $\left(\frac{-5+3\sqrt{17}}{2}\right)$cm y $\left(\frac{5+3\sqrt{17}}{2}\right)$ cm.

**Página 51**

**c.** La ecuación es $x^2+12x-60 = 0$. La medida del lado menor es $(4\sqrt{6}-6)$ cm.

**5.**

**a.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} = 0;$

$x_1 = 2$ y $x_2 = -1$

**b.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4} = 0;$

$x_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**c.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} = 0;$

$x_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

**d.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\sqrt{2} = 0;x_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4\sqrt{2}}}{2}$ y

$x_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4\sqrt{2}}}{2}$

**6.**

**a.** Falso, las soluciones son $x_1 = \sqrt{14}-1$ y $x_2 = -\sqrt{14}-1$.

**b.** Falso, se puede factorizar como $(x-2)^2+3 = 0$.

**c.** Falso, las soluciones son $x_1 = \sqrt{3}+1$ y $x_2 = -\sqrt{3}+1$.

**d.** Falso, es para valores menores que 4 no menor igual.

**Página 52**

**1.**

**a.** $x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2-4\cdot1\cdot81}}{2};$

$x_{1,2} = 9$

**b.** $x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2-4\cdot1\cdot-121}}{2};$

$x_1 = 11$ y $x_2 = -11$

**c.** $x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2-4\cdot4\cdot-14}}{2\cdot4};$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -\frac{7}{2}$

**d.** $x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{-21^2-4\cdot1\cdot7}}{2}; x_1 = \frac{21-\sqrt{413}}{2}$ y

$x_2 = \frac{21+\sqrt{413}}{2}$

**e.** $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2-4\cdot3\cdot0}}{2\cdot3};$

$x_1 = 4$ y $x_2 = 0$

f. $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}; x_1 = \frac{9 - \sqrt{69}}{6}$ y

$x_2 = \frac{9 + \sqrt{69}}{6}$

g. $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2};$

$x_1 = -4$ y $x_2 = 0$

h. $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{32};$

$x_{1,2} = \frac{1}{4}$

i. $x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4 \cdot -8 \cdot -1}}{-2 \cdot 8}; x_1 = \frac{4+\sqrt{14}}{4}$ y $x_2 = \frac{4-\sqrt{14}}{4}$

**2.**

a. Raíces complejas.
b. Raíces reales y distintas.
c. Raíces complejas.
d. Raíces reales y distintas.
e. Raíces reales e iguales.
f. Raíces complejas.

**3.**

a. Respuesta variable, por ejemplo: $x^2 - 4x + 2 = 0$, tiene raíces reales y sus soluciones son $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{2}$
b. Respuesta variable, por ejemplo: $x^2 - 12x + 36 = 0$, tiene raíces reales y sus soluciones son $x\ 1{,}2 = 6$

**Página 53**

**4.**

a. Los números son 5 y −5.
b. La altura es 13 cm.
c. Los números son 11 y 13.
d. El lado más largo mide 5, 794.
e. El radio inicial mide 3 cm.
f. 2, 4 y 6.
g. 22 cm y 26 cm

**Página 54**

**5.**

a. $k$ debe ser menor o igual a 0.
b. $k$ debe ser mayor o igual a 2.
c. $k$ debe ser menor o igual que 4.
d. $k$ debe ser distinta de 0.
e. $k$ puede ser cualquier real.
f. $k$ puede ser cualquier real.
g. $k$ debe ser mayor o igual a $-\frac{25}{8}$ y distinto de 0.
h. $k$ debe ser distinto de uno.

**6.**

a. Verdadera.
b. Verdadera.
c. Falso, el valor del discriminante es mayor a 0.

**Página 55**

**7.**

a. $x^2 + 2x - 8 = 0$
b. $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$
c. $2x^2 - x = 0$
d. $x^2 - 5x + 4 = 0$
e. $6x^2 + 6x + \frac{4}{3} = 0$
f. $1x^2 + 3x + 2 = 0$

## Antes de continuar

**Página 56**

1. D
2. B
3. C
4. C
5. B
6. D

**Página 57**

7. C
8. D
9. D
10. C
11. B
12. A
13. C
14. C

## Lección 6

**Página 58**

**1.**

a. × La potencia mayor es $\frac{1}{2}$.
b. × La potencia mayor es 1.
c. × La potencia mayor es 3.
d. × Corresponde a las raíces de una función cuadrática.
e. ✓ La potencia mayor es 2.
f. × La potencia mayor es 1.
g. × La potencia mayor es 1.
h. × A pesar que la potencia mayor es 2, el término y también tiene el mismo grado y al despejar no resulta una función de segundo grado.
i. ✓ La potencia mayor es 2.

**2.**

a. a = 3
b = −5
c = 2

b. a = 3
b = −2
c = −9

c. a = 8/5
b = −2
c = −3

d. a = −1
b = 1
c = −1

e. a = 22/3
b = −2
c = −3

f. a = −5
b = 9/2
c = −2

## Página 59

**3.**

**a.** $f(x) = 6x^2 - 4x$

**b.** $g(x) = x^2 + 3x$

**c.** $h(x) = 2x^2 - 5x - 12$

**d.** $i(x) = 18x^2 - 27x - 18$

**e.** $j(x) = 5x^2 - 30x$

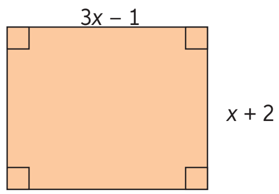
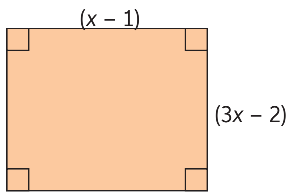
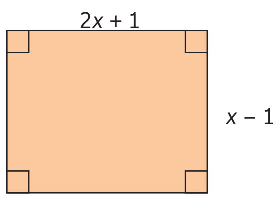
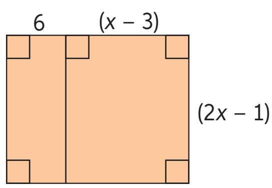
**f.** $k(x) = 2x^2 - 50$

**g.** $l(x) = 2x^2 + 3x - 9$

**h.** $m(x) = 6x^2 - 13x + 6$

## Página 60

**4.**

| Función | Área que representa |
|---|---|
| $A_1(x) = (3x - 1)(x + 2)$ |   |
| $A_2(x) = (x - 1)(3x - 2)$ |   |
| $A_3(x) = (2x + 1)(x - 1)$ |   |
| $A_4(x) = (x + 3)(2x - 1)$ |   |

**5.**

| | x | | | |
|---|---|---|---|---|
| Función | -1 | 0 | 1 | 3 |
| $f(x) = 2x^2 + 7$ | 9 | 7 | 9 | 25 |
| $g(x) = x^2 - 3x + 1$ | 5 | 1 | -1 | 1 |
| $p(x) = -2x^2 + 3$ | 1 | 3 | 1 | -15 |
| $t(x) = 4x - 2x^2 + 1$ | -5 | 1 | 3 | -5 |
| $h(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{2}$ |
| $o(x) = x - x^2$ | -2 | 0 | 0 | -6 |
| $q(x) = -3x^2 + x + 1$ | -3 | 1 | -1 | -23 |

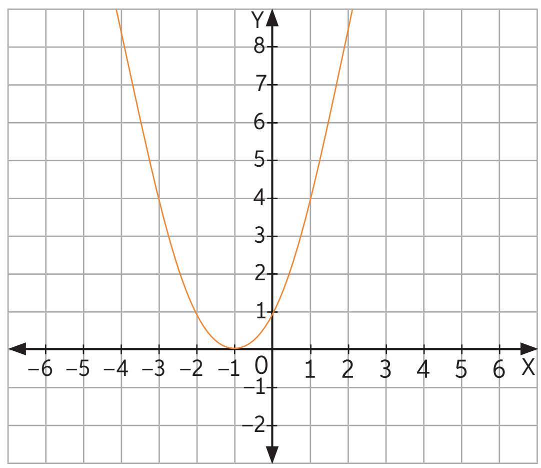
## Página 61

**1.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (3, 3) | | | X |
| (-2, 3) | | | X |
| (0, -3) | | X | X |
| (0, -1) | X | | |
| (2, 3) | | X | |
| (2, -3) | X | | |
| (-3, 3) | | X | |
| (1, -5) | | | |

**2.**

| Función | |
|---|---|
| $f(x) = x^2 + 2x + 1$ | Concavidad |
| | Convexa |
| | Vértice |
| | (-1, 0) |
| | Eje de simetría |
| | x = -1 |
| | Intersección con los ejes |
| | (-1, 0); (0, 1) |




## Página 62

**3.**

**a.**

- $y > f(x)$
- $y < f(x)$
- $y > f(x)$
- $y > f(x)$
- $y = f(x)$
- $y > f(x)$

**b.**

- $y < f(x)$
- $y < f(x)$
- $y = f(x)$
- $y < f(x)$

**4.**

**a.** Verdadera. Según esto puede intersecar en uno, dos o ningún punto.

**b.** Falsa. En el caso que las raíces fueran (-3, 0) y (3, 0) entonces el discriminante sería mayor que cero.

**c.** Falsa. Las coordenadas de las intersecciones de una función cuadrática con el eje X, se llaman raíces.

**d.** Falsa. Si el determinante es negativo entonces la función no interseca al eje X.

**Página 63**

**5.**

**a.** $f(x) = x^2 + 5x + 6$ **c.** $h(x) = x^2 + 3x + 2$

**b.** $g(x) = -x^2 + x + 2$ **d.** $i(x) = x^2 + x - 2$

**6.**

**a.** $\Delta = -24$ No tiene raíces reales.

**b.** $\Delta = 0$ Tiene dos raíces reales iguales.

**Página 64**

**c.** $\Delta = 72$ Tiene dos raíces reales diferentes.

**d.** $\Delta = 89$ Tiene dos raíces reales diferentes.

**e.** $\Delta = 0$ Tiene dos raíces reales iguales.

**f.** $\Delta = 4$ Tiene dos raíces reales diferentes.

**g.** $\Delta = 0$ Tiene dos raíces reales iguales.

**h.** $\Delta = -3$ No tiene raíces reales.

**7.**

| x | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| -7 | -7 | -5 | -1 | 5 |
| 11 | 4 | 1 | 2 | 7 |
| 10 | 4 | 0 | -2 | -2 |
| -10 | -1 | 2 | -1 | -10 |
| 30 | 9 | 0 | 3 | 18 |
| -15 | -9 | -5 | -3 | -3 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 7 |
| 26 | 9 | 0 | -1 | 6 |
| -1 | -2 | -1 | 2 | 7 |

**Página 65**

**8.**

**a.** Convexa. Intersección eje Y: (0, -2). Intersecciones eje X: (0,56; 0) y (-3,56; 0).

**b.** Convexa. Intersección eje Y: (0, -2). Intersecciones eje X: (0,82; 0) y (-0,82; 0).

**c.** Convexa. Intersección eje Y: (-0,25; -0,25). Intersecciones eje X: (-0,5; 0) y (0, 0).

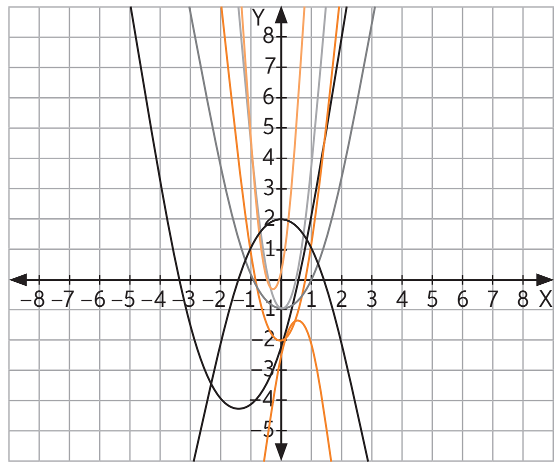
**d.** Cóncava. Intersección eje Y:(0, 2). Intersecciones eje X: (1,41; 0) y (-1,41; 0).

**e.** Convexa. Intersección eje Y:(0, -1). Intersecciones eje X: (0,45; 0) y (-0,45; 0).

**f.** Cóncava. Intersección eje Y:(0, -2). Intersecciones eje X: No hay.

**g.** Convexa. Intersección eje Y:(0, 6). Intersecciones eje X: No hay.

**h.** Convexa. Intersección eje Y:(0, -1). Intersecciones eje X: (-1, 0) y (1, 0).



**Página 66**

**1.**

**a.** $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

**b.** $g(x) = -3(x-0)^2 + 2$

**c.** $h(x) = (x-0)^2 + \frac{3}{2}$

**d.** $i(x) = (x-1)^2 + 0$

**e.** $j(x) = -2(x-0)^2 + 1$

**f.** $k(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

**g.** $l(x) = (x-2)^2 + 2$

**h.** $m(x) = -3(x-0)^2 + 5$

**2.**

**a.** $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - 6$ **f.** $(x-0)^2 + \frac{1}{3}$

**b.** $(x-1)^2 + 2$ **g.** $(x+1)^2 + 2$

**c.** $(x+1)^2 + 4$ **h.** $(x-0)^2 - 2$

**d.** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$ **i.** $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 2$

**e.** $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 0$

**Página 67**

**j.** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ **m.** $(x-0)^2 - 4$

**k.** $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 5$ **n.** $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 2$

**l.** $(x-0)^2 + 0$ **o.** $(x-0)^2 + \frac{1}{4}$

**3.**

**a.** Falso, de la forma canónica de la una función cuadrática se puede extraer de inmediato información sobre su concavidad y su vértice.

**b.** Falso, los movimientos en el eje X están asociados al parámetro $h$.

**c.** Falso, si $k < 0$, la gráfica se mueve hacia abajo en $|k|$ unidades.

**d.** Verdadero, los movimientos en el eje X están asociados al parámetro $h$.

**e.** Verdadero, ya que $(x + 2)^2 - 6 \; = \; x^2 + 4x + 4 - 6 \; = \; x^2 + 4x - 2$

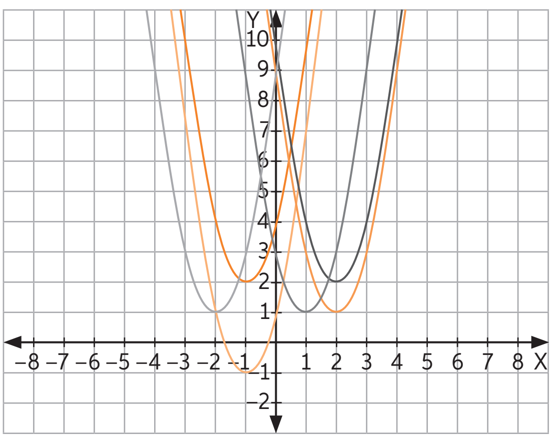
**f.** Falso, la función g(x) ya se encuentra expresada en su forma canónica.

**Página 68**

**4.**

**a.** $2(x-2)^2 + 2$ **c.** $2(x-1)^2 + 1$ **e.** $2(x+1)^2 - 1$

**b.** $2(x+1)^2 + 2$ **d.** $2(x-2)^2 + 1$ **f.** $2(x+2)^2 + 1$




**Página 69**

**5.**

**a.** $h = -2$
$k = 1$

**b.** $h = -1$
$k = 2$

**c.** $h = -1$
$k = 0$

**d.** $h = 0$
$k = -2$

**e.** $h = 1$
$k = -2$

**f.** $h = -1$
$k = -3$

**Página 70**

**1.**

**a.**

- $A \; = \; \frac{1}{2}x(x + 2)$
- El área es $A \; = \; 2021 \cdot 2023 \; = \; 4\,088\,483$ u$^2$.

**b.**

- $h^2 \; = \; x^2 + (x + 10)^2$.
- $h \; = \; \sqrt{1^2 + (10 + 1)^2} \; = \; \sqrt{122}$ u.
- El cateto debe medir 8,23 unidades aproximadamente.
- $A \; = \; \frac{1}{2}x(x + 10)$ u2.
- $A \; = \; \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \; = \; 12$ u2.
- El cateto debe medir 12 unidades.

**c.** No es posible plantear la misma ecuación considerando el cateto mayor ya que se obtiene una respuesta no válida.

**Página 71**

**2.**

**a.** El balón se encuentra a una altura de 3 metros.

**b.** No es posible alcanzar dicha altura.

**c.** El balón alcanza su altura máxima a los 2 metros horizontales.

**d.** La altura máxima que alcanza el balón es de 4 metros.

**3.**

**a.** $h(t) \; = \; 5t - 10t^2$

**b.** Sí, es correcto, ya que:
$h(0,1) \; = \; 5 \cdot 0,1 - 10 \cdot (0,1)^2 \; = \; 0,4y$
$h(0,4) \; = \; 5 \cdot 0,4 - 10 \cdot (0,4)^2 \; = \; 0,4$ por lo que en ambos instantes se encuentra a una altura de 0,4 metros.

**c.** 0,6 m.

**d.** Se demora 0,5 segundos en llegar al suelo.

**Página 72**

**e.** Se tarda 0,25 segundos en alcanzar su altura máxima

**f.** La altura máxima que alcanza el objeto es 0,625 metros.

**4.** Respuesta variable, por ejemplo:

**a.** Nebultrón

**b.** 30

**c.** $h(t) \; = \; 30t - 15t^2$

**d.** El objeto alcanza una altura máxima de 15 metros.

**e.** El objeto demora 2 segundos en llegar al suelo.

**5.**

**a.** 32

**b.** Aproximadamente 30.

**c.** 36

**d.** 17

## Página 73

**6.**

- **a.** $I = (6000 - 5x) \cdot x$
- **b.** \$3000
- **c.** Entre \$1000 y \$5000.
- **d.** $I(x) = -5x^2 + 6000x$.
- **e.** \$1 350 000
- **f.** \$1 750 000

# Antes de continuar

## Página 74

| | | |
|---|---|---|
| **1.** C | **4.** B | **7.** C |
| **2.** C | **5.** B | **8.** A |
| **3.** D | **6.** A | **9.** B |

## Página 75

| | | |
|---|---|---|
| **10.** D | **11.** A | **12.** D |

# Lección 7

## Página 76

**1.**

**a.**

- {1, 2, 3, 4}
- {1, 2, 3, 4}
- No existe.
- No existe.
- No existe.

**b.**

- {1, 2, 3, 4}
- {1, 2, 3, 4}
- No existe.
- No existe.
- No existe.

**c.**

- {1, 2, 3, 4}
- {1, 2, 3, 4}
- Si existe.
- {1, 2, 3, 4}
- {1, 2, 3, 4}

**d.**

- $\{x_1, x_2, x_3\}$
- $\{z_0, z_1, z_2\}$
- No existe.
- No existe.
- No existe.

**2.**

| Descripción de f | Descripción de $f^{-1}$ |
|---|---|
| | Divide un número a la mitad. |
| | Multiplica un número por tres y luego disminuye dos unidades. |
| | Transforma un número en su antecesor. |
| Suma 5 unidades a un número. | |
| Multiplica un número por $\frac{3}{2}$. | |
| Multiplica al número por 5. | |

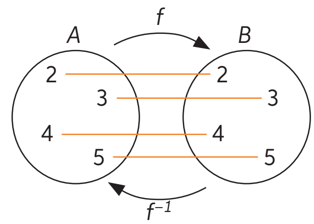
## Página 77

**3.**

- **a.** $f(x) = x + 1$
- **b.** Recf = {5, 7, 9}
- **c.** $f^{-1}(x) = x - 1$

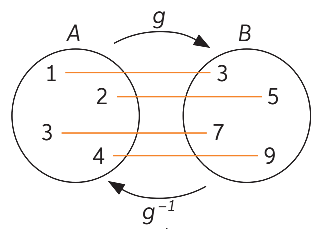
**4.**

**a.**

- $f(x) = x$
- 

- $f^{-1}(x) = x$

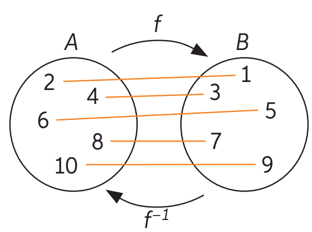
**b.**

- $g(x) = 2x + 1$
- 

- $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

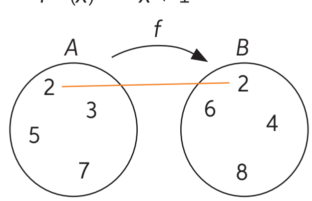
**5.**

**a.**




- Sí.
- $f^{-1}(x) = x + 1$

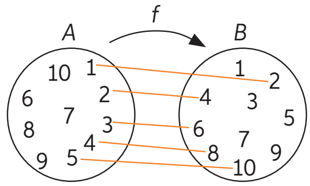
**b.**




- No.
- No existe.

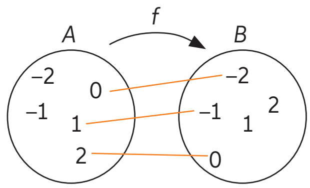
## Página 78

**c.**



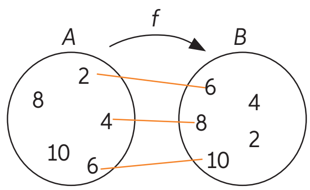

- No.
- No existe.

**d.**



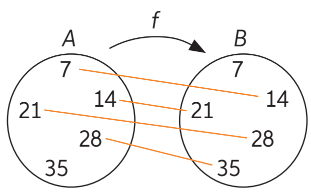

- No.
- No existe.

**e.**



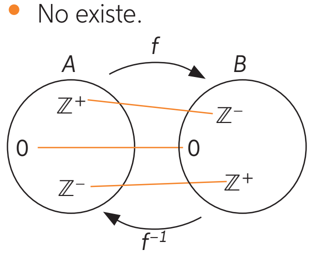

- No.
- No existe.

**f.**



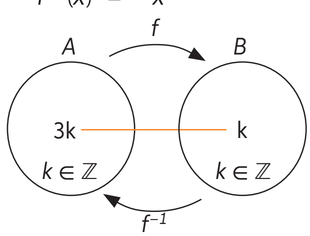

- No.
- No existe.

**g.**




- Sí.
- $f^{-1}(x) = -x$

**h.**




- Sí.
- $f^{-1}(x) = 3x$

## Página 79

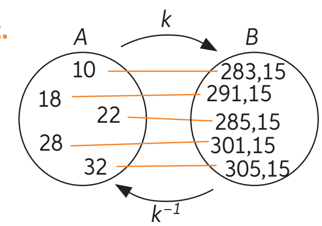
**6.**

**a.** $K(C) = C + 273,15°$

**b.** Respuesta variable, por ejemplo:

| C | K(C) |
|---|---|
| 10 | 283,15 |
| 18 | 291,15 |
| 22 | 285,15 |
| 28 | 301,15 |
| 32 | 305,15 |

**c.**




**d.** $K^{-1}(C) = C - 273,15°$

**e.** Corresponde a la expresión que permite convertir grados Kelvin en Celsius.

**7.**

**a.** Falso. Si $f(8) = 4$, entonces $f^{-1}(4) = 8$.

**b.** Verdadero.

**c.** Verdadero.

**d.** Falso. Si $f(1) = 1$, entonces $f^{-1}(1) = 1$.

**e.** Verdadero.

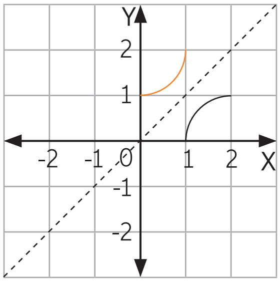
**f.** Verdadero.

**g.** Falso. Si $f^{-1}(y) = x$, entonces $f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x)$.

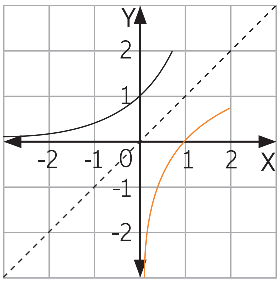
## Página 80

**1.**

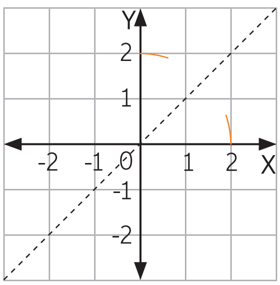
**a.**



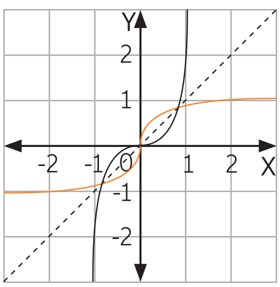
**b.**



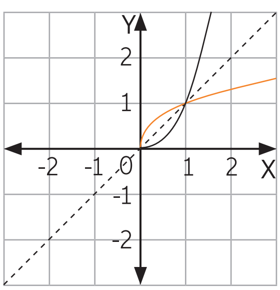
**c.**



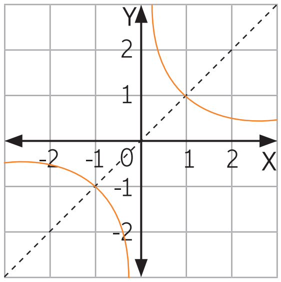
**d.**



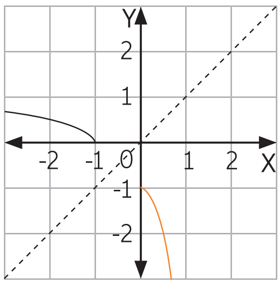
**e.**



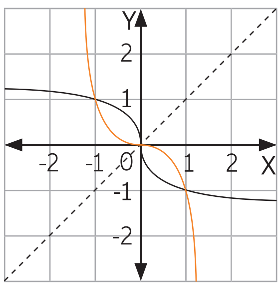
**f.**



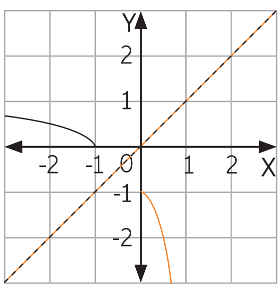
**g.**



**h.**

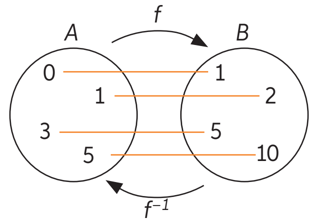


**i.**



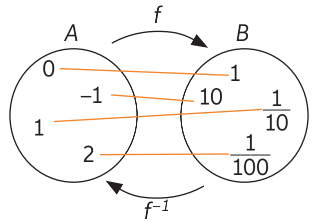
**2.**

**a.**




## Página 81

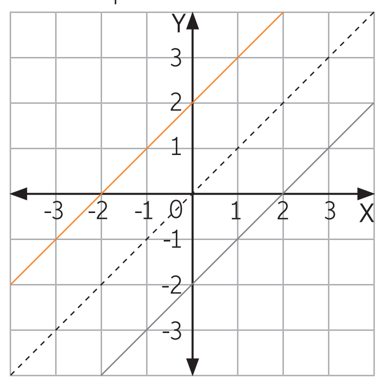
**b.**



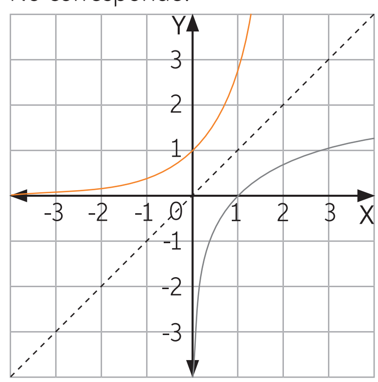

**3.**

**a.** Si corresponde.

**b.** No corresponde.

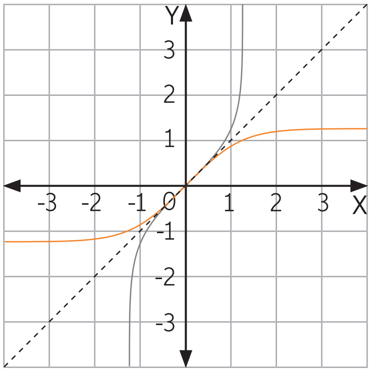


**c.** No corresponde.

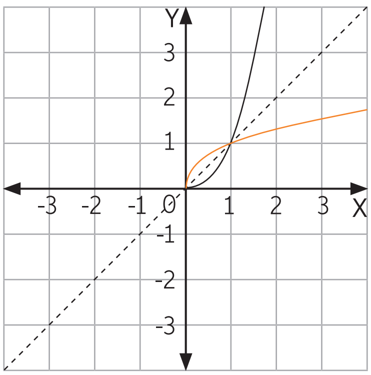


**d.** Si corresponde.

**e.** No corresponde.




**f.** No corresponde.




**Página 82**

**g.** Si corresponde.

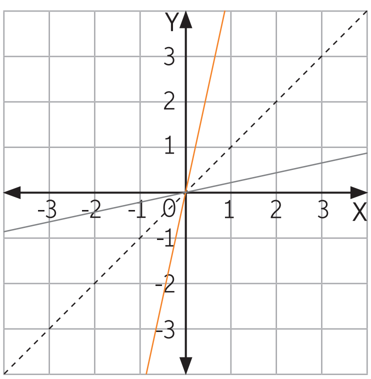
**h.** Si corresponde.

**4.**

**a.** No tiene función inversa.

**b.** No tiene función inversa.

**c.** Si tiene función inversa.




**d.** No tiene función inversa.

**Página 83**

**5.** Respuesta variable, por ejemplo:

**a.**

| x | f(x) |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 8 | 2 |
| 16 | 3 |
| 32 | 4 |

**b.**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 0 | 4 |
| -1 | 5 |
| -2 | 6 |

**c.**

| x | f(x) |
|---|---|
| 2 | 100 |
| 1 | 10 |
| 0 | 1 |
| -1 | $\frac{1}{10}$ |

**d.**

| x | f(x) |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |
| -1 | 1 |

**6.**

**a.** Falso. Son simétricas respecto a la recta y = x.

**b.** Verdadero.

**c.** Falso. Si el punto (a,b) se encuentra sobre f, entonces el punto (b,a) se encuntra sobre $f^{-1}$.

**d.** Verdadero.

**e.** Verdadero.

**f.** Falso. Si el gráfico de f es perpendicular a y = x, entonces el gráfico de $f^{-1}$ también es perpendicular a y = x.

**g.** Falso. No necesariamente se cortan en un punto.

**Página 84**

**1.**

**a.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

**b.** $g^{-1}(x) = 4x$

**c.** $h^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{7}}{7}$

**d.** $p^{-1}(x) = 2^3x$

**e.** $q^{-1}(x) = 4x$

**f.** $s^{-1}(x) = \frac{2}{5}x$

**g.** $t^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

**h.** $r^{-1}(x) = 2(4 - x)$

**i.** $j^{-1}(x) = \frac{x+\pi}{3}$

**j.** $b^{-1}(x) = 3^2(x - 10^2)$

**k.** $k^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

**l.** $a^{-1}(x) = x + 2^{-6}$

**2.**

**a.** $p = \frac{1}{3}, q = -\frac{1}{3}$

**b.** $p = \frac{1}{4}, q = -1$

**c.** $p = 0, q = -\frac{1}{5}$

**d.** $p = -\frac{1}{3}, q = 0$

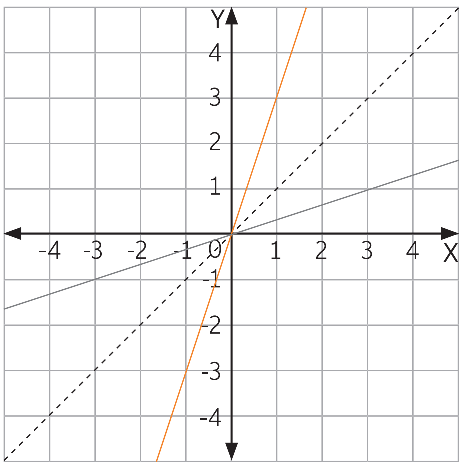
**e.** $p = 0, q = 1$

**f.** $p = -9, q = \frac{1}{3}$

Página 85

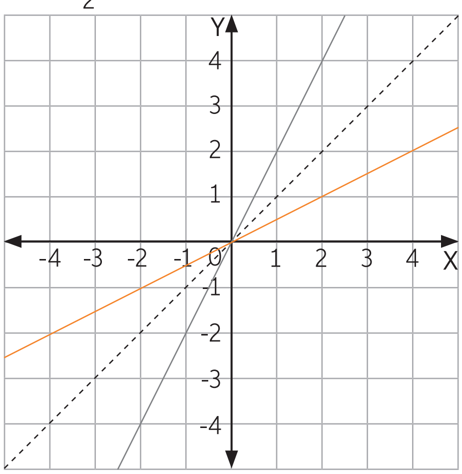
**3.**

**a.** $f(x) = 3x + 0$



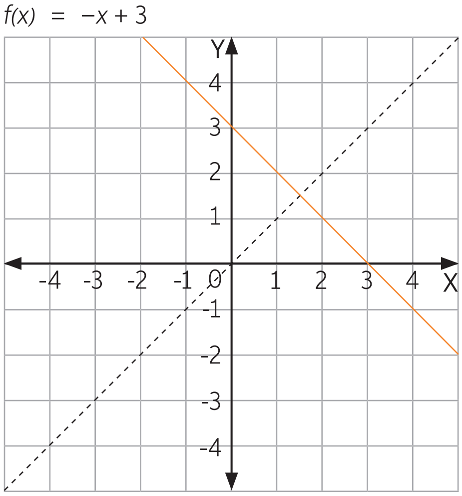

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$

**b.** $f(x) = \frac{1}{2}x$



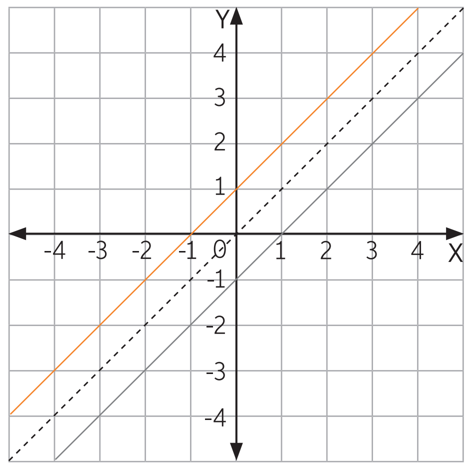

$f^{-1}(x) = 2x$

**c.** $f(x) = -x + 3$



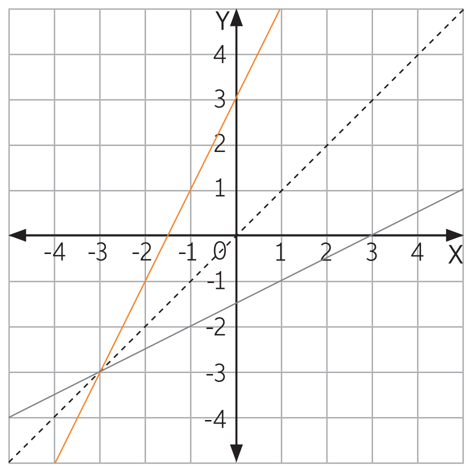

$f^{-1}(x) = -x + 3$

**d.** $f(x) = x + 1$



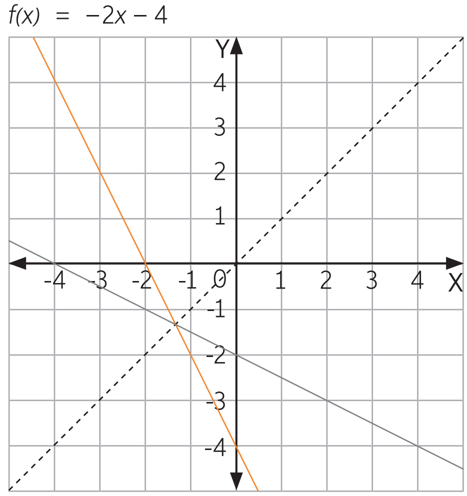

$f^{-1}(x) = x - 1$

**e.** $f(x) = 2x + 3$



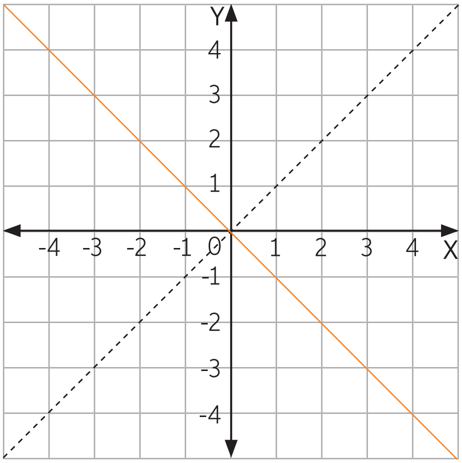

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**f.** $f(x) = -2x - 4$



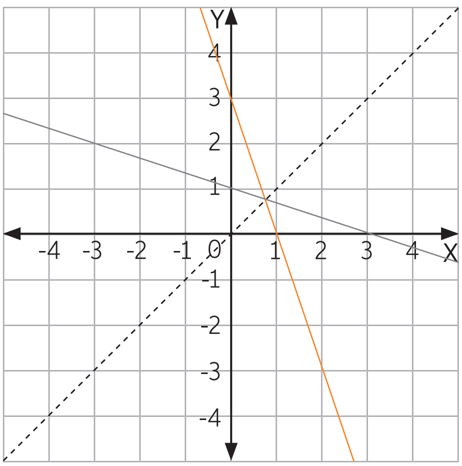

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

**g.** $f(x) = -x$



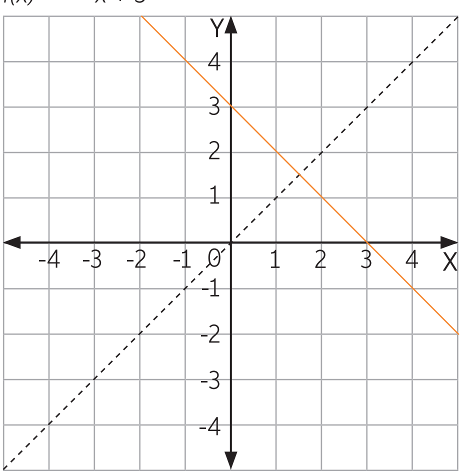

$f^{-1}(x) = -x$

**h.** $f(x) = -3x + 3$




$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

**i.** $f(x) = -x + 3$




$f^{-1}(x) = -x + 3$

**Página 86**

**4.**

| Descripción de f | Expresión algebraica de $f$ | Descripción de $f^{-1}$ | Expresión algebraica de $f^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| | $f(x) = 4x$ | Divide un número por 4. | $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ |
| | $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ | Le resta 1 a un número y lo multiplica por 2. | $f^{-1}(x) = 2(x - 1)$ |
| Le suma 1 a un número y lo divide por 8. | $f(x) = \frac{x+1}{8}$ | | $f^{-1}(x) = 8x - 1$ |
| Multiplica un número por 3 y le resta 6. | | Le suma 6 a un número y lo divide por 3. | $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$ |
| Le suma 1 a un número y lo multiplica por 2. | $f(x) = 2(x + 1)$ | Divide un número por 2 y le resta 1. | |
| Multiplica un número por $\sqrt{2}$. | | Divide un número por $\sqrt{2}$. | $f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ |
| Le resta 3 a un número y lo multiplica por $\pi$. | $f(x) = \pi(x - 3)$ | | $f^{-1}(x) = \frac{x}{\pi} + 3$ |

**5.**

**a.** Verdadera.
**b.** Falsa. Su inversa es $f^{-1}(x) = \frac{x}{p}$
**c.** Falsa. Su inversa es $g(x) = x + q$
**d.** Falsa. Si p = q = 1, si corresponde a la inversa.
**e.** Verdadera.
**f.** Verdadera.

**6.** Sea x pulgadas, entonces la función que transforma en centímetros es $f(x) = 2,54x$, su inversa entonces es $f^{-1}(x) = \frac{x}{2,54}$ y esta representa la forma de obtener pulgadas en función de centímetros.

**Página 87**

**1.**

**a.** $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{5}}$
**b.** $g^{-1}(x) = \sqrt{3x}$
**c.** $h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x\sqrt{2}}{2}}$
**d.** $p^{-1}(x) = \sqrt{5^7 x}$
**e.** $q^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$
**f.** $s^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3}{5}x}$
**g.** $t^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}$
**h.** $r^{-1}(x) = (3x)^2$
**i.** $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{3}$
**j.** $b^{-1}(x) = x^2 + 1$
**k.** $k^{-1}(x) = \frac{x^2}{9}$
**l.** $a^{-1}(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$

**2.**

**a.** $p = \frac{1}{3}, q = 0$

**b.** $p = \frac{1}{10^2}, q = 0$

**c.** $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

**d.** $p = 1, q = 1$

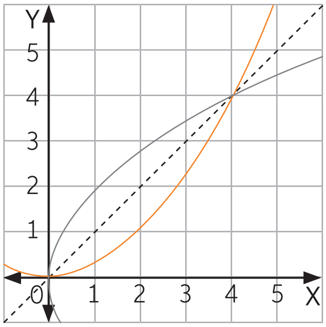
**e.** $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{2}$

**f.** $p = 0, q = \frac{1}{3}$

**Página 88**

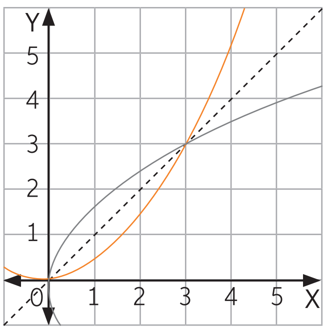
**3.**

**a.** $f(x) = \frac{1}{4}x^2$



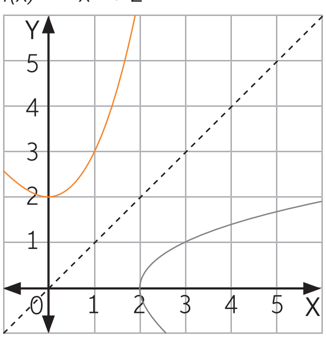

$f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$

**b.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2$



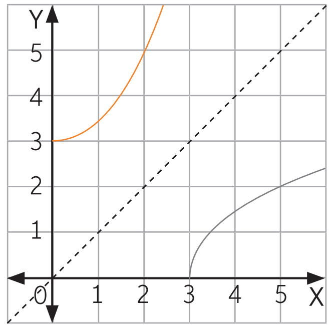

$f^{-1}(x) = \sqrt{3x}$

**c.** $f(x) = x^2 + 2$



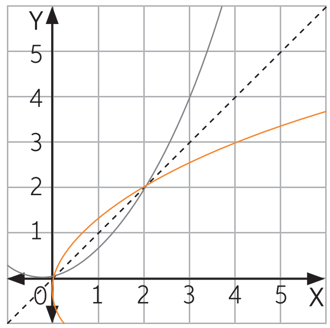

$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$

**d.** $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3$



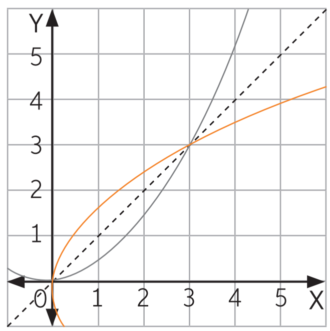

$f^{-1}(x) = \sqrt{(2x - 6)}$

**e.** $f(x) = \sqrt{2x}$




$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2$

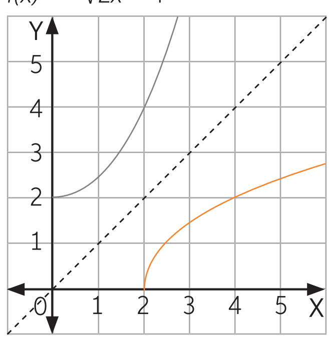
**f.** $f(x) = \sqrt{3x}$




$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^2$

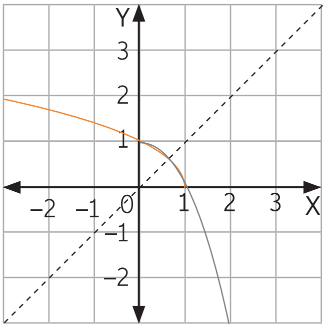
**Página 89**

**g.** $f(x) = \sqrt{2x - 4}$




$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 4}{2}$

**h.** $f(x) = \sqrt{1-x}$




$f^{-1}(x) = 1 - x^2$

**4.**

- **a.** l(x)
- **b.** b(x)
- **c.** k(x)
- **d.** No está graficada.
- **e.** s(x)
- **f.** n(x)
- **g.** m(x).

**5.**

- **a.** Verdadero
- **b.** Falso. Si es necesario restringir su dominio depende de cada función.
- **c.** Falso. La función original es $f(x) = \frac{1}{p}x^2 - \frac{q}{p}$.

## Antes de continuar

**Página 90**

1. C
2. A
3. C
4. A
5. A
6. A

**Página 91**

7. B
8. D
9. D
10. C
11. C

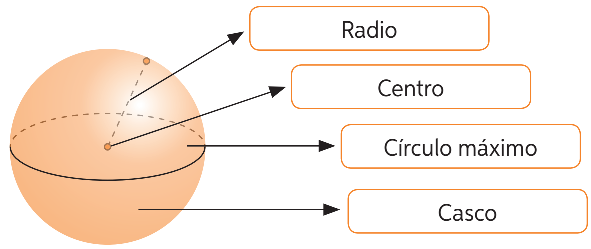
# Unidad 3: Geometría

## Lección 8

**Página 92**

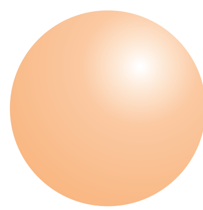
**1.**

- **a. Centro:** Es el punto interior que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos de la superficie de la esfera.
- **b. Radio:** Es el segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie de la esfera.
- **c. Circulo máximo:** Es el que divide a la esfera en dos partes iguales o hemisferios, su centro es el mismo que el centro de la esfera.

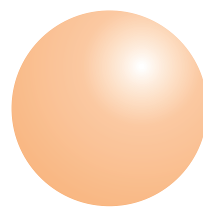



**2.**

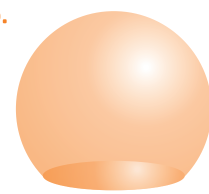
**a.**



**c.**



**b.**



**d.**

**Página 93**

**3.**

- **a.** $r = 2\sqrt{2}$ cm.
- **c.** $r = 2$ cm.
- **b.** r = 10 cm.
- **d.** $r = \frac{9}{2\pi}$ cm.

**4.**

- **a.** Verdadera.
- **b.** Falso, el radio es 5 cm.
- **c.** Verdadera.
- **d.** Falso, la distancia entre el centro y cualquier punto del casco es la misma, ya que corresponde al radio.
- **e.** Falso, la medida del radio de la esfera es la misma para el círculo máximo.
- **f.** Falso, el radio es $r = \frac{2}{13}$ cm.
- **g.** Verdadera.
- **h.** Verdadera.

## Página 94

**1.**

**a.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$

**b.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^3 = \frac{2197}{6}\pi \text{ cm}^3$

**c.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \sqrt{3}^3 = 4\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$

**d.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{48} \text{ cm}^3$

**e.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{243}{2}\pi \text{ m}^3$

**f.** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ m}^3$

**2.** Respuestas variables. Por ejemplo: pelota de ping pong $r = 20$ mm y $V = \frac{32\,000}{3}\pi \text{ mm}^3$.

**3.**

**a.** $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$

**b.** $r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi}}$

**c.** $r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

**d.** $r = 3\sqrt[3]{6}$

**e.** $r = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$

**f.** $r = \sqrt[3]{3}$

## Página 95

**4.**

**a.** $V = \frac{500}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3$

**b.** $V = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

**c.** $V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{24} \text{ cm}^3$

**d.** $V = \frac{2197}{6}\pi \text{ cm}^3$

**e.** $V = \frac{243}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{243}{4}\pi \text{ m}^3$

**f.** $V = 36\pi \text{ cm}^3$

**g.** $V = \frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\pi} \text{ cm}^3$

**h.** $V_1 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$, $V_2 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$

**5.**

**a.** $V = \frac{32}{375}\pi \text{ m}^3$

## Página 96

**b.** $V = \frac{125}{6}\pi \text{ cm}^3$

**c.** $V = \frac{1331}{6}\pi \text{ cm}^3$

**d.** $V = \frac{2197}{6}\pi \text{ cm}^3$

**e.** El volumen del cono es $V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 8\pi = \frac{128}{3}\pi \text{ cm}^3$ y el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3} \cdot 4^3\pi = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$.

**f.** $A = 36\pi \text{ cm}^2$

**g.** $P = 36\pi$ cm

## Página 97

**h.** V = 864 $\text{cm}^3$

**i.** El volumen de la canica es $V = \frac{125}{2} \text{ mm}^3$,se podrían fabricar 5600 canicas aproximadamente.

**j.**

- El área del suelo de cada semiesferas es $A = \pi \text{ m}^2$.
- El radio de la esfera más grande es $r = \frac{5}{2}$ m.
- Se necesitan $\frac{149}{12}\pi \text{ m}^3$.

## Página 98

**1.**

**a.** $A = 4\pi \text{ cm}^2$

**b.** $A = 324\pi \text{ mm}^2$

**c.** $A = 64\pi \text{ km}^2$

**d.** $A = \frac{41616}{81}\pi \text{ cm}^2$

**e.** $A = 25\pi \text{ m}^2$

**f.** $A = 8\pi \text{ cm}^2$

**g.** $A = 20\pi \text{ dm}^2$

**h.** $A = 96\pi \text{ m}^2$

**i.** $A = 108\pi \text{ m}^2$

**2.**

**a.** $A = 8\pi \text{ cm}^2$

**b.** $A = 9\pi \text{ cm}^2$

**c.** $A = 20\pi \text{ cm}^2$

**d.** $A = \pi \text{ u}^2$

**e.** $A = \pi \text{ cm}^2$

**f.** $A = 2\pi\sqrt[3]{\frac{9}{2}} \text{ dm}^2$

**g.** $A = 4\pi\sqrt[3]{\frac{9}{4\pi^2}} \text{ mm}^2$

**h.** $A = 6\pi \text{ cm}^2$

## Página 99

**3.**

**a.** $r = 3$ cm

**b.** $r = \sqrt{3}$ m

**c.** $r = \frac{1}{2}$ mm

**d.** $r = \sqrt{\frac{1}{3}}$ dm

**e.** $r = 2\sqrt{505}$ m

**f.** $r = 1$ cm

**4.**

**a.** Verdadera.

**b.** Falso, hay que considerar el área de la base de la semiesfera.

**c.** Verdadera.

**d.** Verdadera.

**e.** Falso, el área del casco disminuye a su cuarta parte.

**f.** Verdadera.

**g.** Verdadera.

**Página 100**

**5.**

a. $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$

b. $A = 4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}\right)^2$

c.

- $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ y$A = 2\pi\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}}$
- $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ y $A = 2\pi\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$
- $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot 2021}$ y $A = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 2021^2}{2\pi^2}}$

**6.**

a. $A = 4\pi{\cdot}24622 \cdot \sqrt[3]{24622}\ \text{km}^2$

b. $A = 11{,}79 \cdot 10^9\ \pi\ \text{km}^2$

c. $A \approx 1{,}4649 \cdot 10^8\ \text{km}^2$

d. $A \approx 45954841\pi\ \text{km}^2$

**7.**

a. El área es $A = 242\pi\ \text{m}^2$

**Página 101**

b. El área del suelo es $A = 121\pi\ \text{m}^2$

c. El área es $A = \frac{2057}{20}\pi\ \text{m}^2$

d. El volumen es $V = \frac{2662}{3}\pi\ \text{m}^3$

e. El radio máximo es de aproximadamente 13 m

f.

- $A = 50\pi\ \text{m}^2$ y $V = \frac{250}{3}\pi\ \text{m}^3$
- $A = 64\pi\ \text{m}^2$ y $V = \frac{256}{3}\pi\ \text{m}^3$
- $A = 54\pi\ \text{m}^2$ y $V = 54\pi\ \text{m}^3$

## Antes de continuar

**Página 102**

**1.** D
**2.** A
**3.** C
**4.** A
**5.** B
**6.** A
**7.** B

**Página 103**

**8.** A
**9.** C
**10.** D
**11.** C
**12.** B
**13.** C
**14.** B

## Lección 9

**Página 104**

**1.**

a. $x = 3\sqrt{2}$

b. $x = \sqrt{34}$

c. $x = 3\sqrt{5}$

d. $x = 2\sqrt{2}$

e. $x = 3$

f. $x = 2$

**2.**

| a | b |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{4}{5}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 1 | $\frac{4}{3}$ |

| c | d |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| $\frac{\sqrt{14}}{4}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ |
| $\frac{\sqrt{7}}{7}$ | $\frac{1}{2}$ |

| e | f |
|---|---|
| $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ | $\frac{\sqrt{21}}{7}$ |
| $\frac{\sqrt{17}}{17}$ | $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ |
| 4 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

**Página 105**

**3.**

a. Que el valor del seno de uno es el valor del coseno del otro.

b. Son ángulos complementarios.

**4.**

a. Verdadera.

b. Falso, el valor es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Verdadera.

d. Falso, beta es de la forma $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

e. Falso, $\beta = 30°$ y $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f. Verdadera.

g. Verdadera.

h. Falso, $\alpha = 60°$

i. Falso, $\cos\alpha = \frac{C}{B}$.

j. Falso, el resultado es $1 + \sqrt{2}$.

## Página 106

**5.**

**a.**
- $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
- $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$
- $\beta = 60°$

**b.**
- 
- $a = \sqrt{3}$
- $b = \sqrt{3}$
- $\alpha = 45°$

**c.**
- $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\beta = 30°$

**d.**
- b = 2
- $c = 2\sqrt{2}$
- $\beta = 45°$

**e.**
- $c = \sqrt{6}$
- $\alpha = 45°$
- $\beta = 45°°$

**f.**
- $a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
- $b = \frac{5}{2}$
- $\beta = 30°$

**g.**
- $a = \sqrt{3}$
- c = 2
- $\beta = 30°$

**h.**
- $b = 10\sqrt{3}$
- c = 20
- $\beta = 60°$

**i.**
- $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\alpha = 45°$

**6.**
- $3\sqrt{3}$
- 3
- 3
- 0

## Página 107

**1.**

**a.** Las vigas miden $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$m y $\sqrt{3}$m respectivamente.

**b.** $A = 2 + \frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm$^2$; $P = 10 + 3\sqrt{3}$ cm

**c.** La torre mide aproximadamente $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ m.

**d.** La altura del edificio donde está el observador es de $30\sqrt{3}$ m.

## Página 108

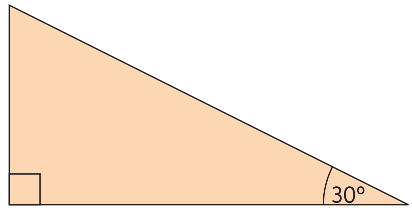
**e.** El largo de la cuerda es 102 m aproximadamente.

**f.**
- $2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6} + \frac{2(2+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$ m.
- $15 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m

## Página 109

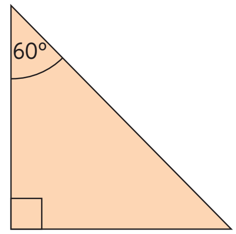
**2.**

**a.**



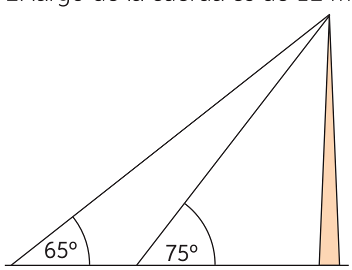

Cateto:$15\sqrt{3}$ cm. Hipotenusa:30 cm.

**b.**



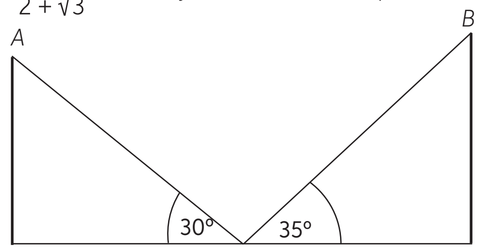

El largo de la cuerda es de 12 m.

**c.**




Los extremos de las cuerdas se encuentran a $\frac{10}{2+\sqrt{3}} \approx 2,6$ y 1, 94 metros, respectivamente.

**d.**

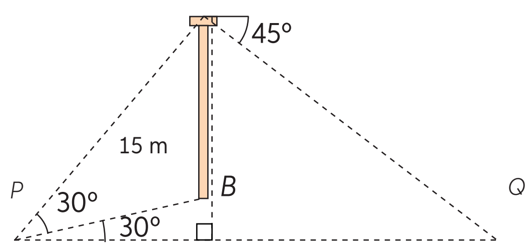



Las alturas aproximadamente son 3,5 m y 2,89 m, respectivamente.

## Página 110

**3.** El área es 68,06 cm$^2$ y su y perímetro es 58,2 cm.

**4.**



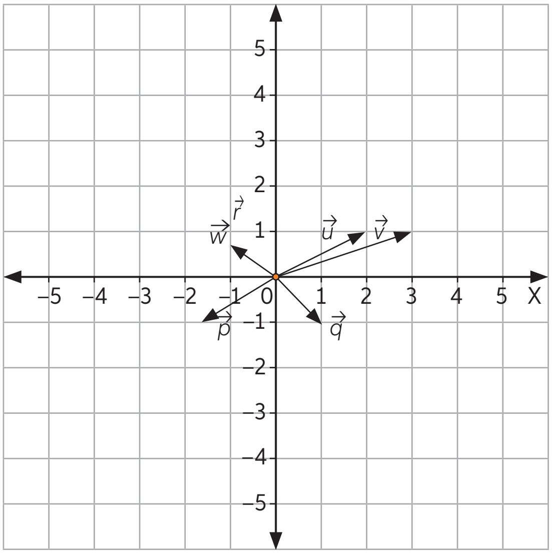

**a.**

**b.** $5\sqrt{3}$metros.

**c.** $5\sqrt{3}$ metros. **d.** $5\sqrt{15}$ metros. **e.** 45°

**Página 111**

**1.**




**a.** $\vec{v_x} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y $\vec{v_y} = \frac{3}{2}$

**b.** $\vec{u_x} = 1$ y $\vec{u_y} = \sqrt{3}$

**c.** $\vec{w_x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\vec{w_y} = \frac{1}{2}$

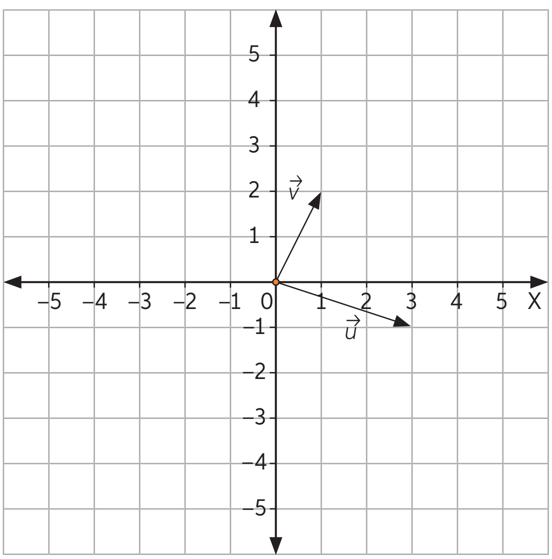
**d.** $\vec{p_x} = -1$ y $\vec{p_y} = -1$

**e.** $\vec{q_x} = \frac{1}{2}$ y $\vec{q_y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**f.** $\vec{r_x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\vec{r_y} = \frac{1}{2}$

**Página 112**

**2.**




**a.** $\vec{v_x} = 1$ y $\vec{v_y} = 2$

$|\vec{v}| = 2{,}24$

$\alpha = 63{,}43°$

**b.** $\vec{u_x} = 3$ y $\vec{u_y} = -1$

$|\vec{u}| = 3{,}16$

$\alpha = 18{,}43°$

**Página 113**

**3.**

**a.**

- $\vec{T_x} = 15\sqrt{2}$
- $\vec{T_y} = 15\sqrt{2}$
- $\vec{F_x} = 10\sqrt{3}$
- $\vec{F_y} = 10$

**b.**

- Horizontal: $15\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$
- Vertical: $15\sqrt{2} + 10$

**4.**

**a.** El vector velocidad es $\vec{v} = (10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$.

**b.** Se lanza con una ra pidez de 6,71 y el ángulo de elevación es 26,57°.

**c.** La rapidez es $2\sqrt{2}$.

**d.** La rapidez es 6.

## Antes de continuar

**Página 114**

**1.** C **3.** D **5.** B **7.** C

**2.** B **4.** C **6.** D **8.** C

**Página 115**

**9.** B **11.** B **13.** C **15.** B

**10.** A **12.** C **14.** C

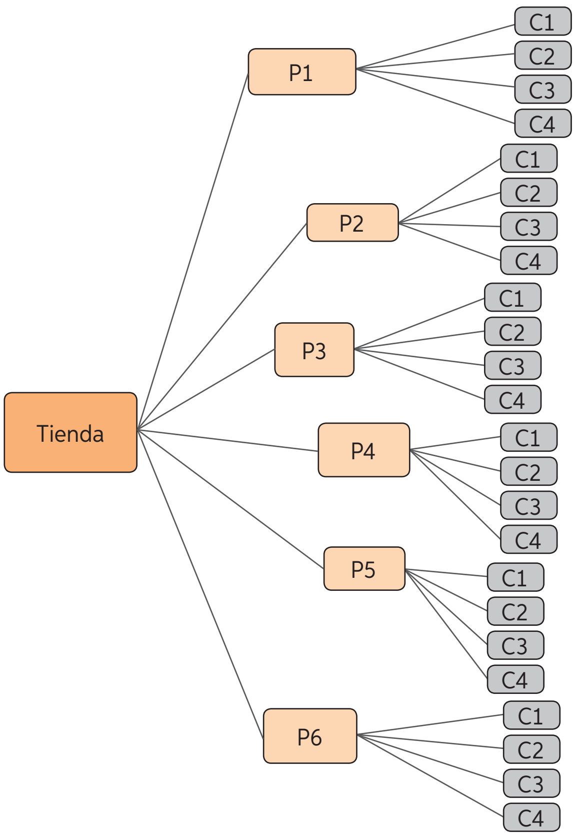
# Unidad 4: Datos y Azar

## Lección 10

**Página 116**

**1.**

**a.**




**b.** Tiene 24 posibles combinaciones.

**c.** Respuesta variable, por ejemplo: Considerando que cada pantalón tiene 4 combinaciones con las camisas y luego sumamos todos los casos.

**d.** Podría armar 96 combinaciones.

**2.**

**a.** .$5 \cdot 5 = 25$

**b.** Puede escoger de 25 maneras distintas.

**3.** Se pueden sentar de 3628800 formas.

**Página 117**

**4.** Pueden construir 36 casas distintas.

**5.** Puede realizar 60 combinaciones.

**6.**

**a.** Se pueden hacer 20736 combinaciones.

**b.** Se pueden hacer 1944 combinaciones.

**c.** Se pueden realizar 62500 combinaciones.

**Página 118**

**1.**

**a.** 24

**b.** 720

**c.** 3628800

**d.** 30

**e.** 95040

**f.** 3047466240

**g.** 21772800

**h.** 19313344512000

**i.** 435891456000

**j.** 362880

**2.**

**a.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2579 | 2795 | 2957 | 2597 | 2759 | 2975 |
| 5792 | 5927 | 5279 | 5729 | 5297 | 5972 |
| 7925 | 7259 | 7592 | 7952 | 7529 | 7295 |
| 9257 | 9572 | 9725 | 9275 | 9527 | 9752 |

**b.** Se pueden formar 24 claves.

**c.** Puede formar 12 combinaciones.

**Página 119**

**d.** Respuesta variable, por ejemplo: El número de permutaciones se reduce a la mitad.

**3.**

**a.**

| | | |
|---|---|---|
| 123 | 231 | 312 |
| 132 | 213 | 321 |

**b.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1234 | 1243 | 1324 | 1342 | 1432 | 1423 |
| 2341 | 2314 | 2431 | 2413 | 2134 | 2143 |
| 3412 | 3421 | 3214 | 3241 | 3124 | 3142 |
| 4123 | 4132 | 4231 | 4213 | 4312 | 4321 |

**c.** Respuesta variable, por ejemplo: diagrama de árbol.

**4.**

**a.** Permutación con repetición.

**b.** Permutación simple.

**c.** Permutación simple.

**d.** Permutación con repetición.

**5.**

**a.** Se pueden ordenar de 720 formas.

**b.** Se pueden ordenar 1307674368000 formas.

**Página 120**

**c.** Se pueden formar 362880 palabras.

**d.** Puede contar con 3628800 formas.

**6.**

**a.** 362880 maneras.

**b.** 80640 maneras.

**c.** 10080 maneras.

7.
a. 28 maneras.
b. 27 maneras.

**Página 121**

1.
a. 120
b. 210
c. 56
d. 1680
e. 625
f. 25
g. 343
h. 117649

2.
a. $V_2^9$
b. $V_4^8$
c. $V_3^{13}$
d. $V_5^{14}$
e. $V_2^{18}$
f. $V_{n+2}^{n+3}$

3.
a. x = 2
b. x = 2
c. x = 3
d. x = 7
e. x = 7
f. x = 13

**Página 122**

4.

| Situación | Tipo de variación |
|---|---|
| Las formas de apilar algunos de los libros distintos de una estantería | Sin repetición |
| El orden en que llegan los tres primeros estudiantes en el primer día de la semana. | Sin repetición |
| Las formas de escribir una contraseña de 5 letras distintas utilizando las letras de la palabra TRIANGULO | Sin repetición |
| La cantidad de grupos de trabajo que se pueden formar con los estudiantes de un curso. | Con repetición |

5.
a. El uniforme se puede escoger de 120 formas.
b. Se puede escoger de 216 formas.
c. Se pueden escoger 30 formas.

6.
a. Se pueden escoger de 120 maneras.
b. Se pueden escoger de 20 maneras.

**Página 123**

c. Se pueden escoger de 360 maneras.

7.
a. Se pueden ordenar de 1680 formas.
b. Se pueden ordenar de 840 formas.
c. Se pueden forman 30240 palabras.

8. Se tiene 512 resultados posibles.
9. Se tienen 1860480 posibilidades.
10. Se pueden formar 6 números de dos dígitos.

**Página 124**

1.
a. 20
b. 56
c. 1
d. 9
e. 35
f. 28
g. 126
h. 495

2.
a. 35 triángulos.
b. 35 cuadriláteros.
c. 21 pentágonos.
d. 7 hexágonos.
e. El número de combinaciones disminuye al aumentar los lados.

3. Se puede crear de 47129212243960 formas.

**Página 125**

4. Pueden ser escogidos de 230230 formas.

5.
a. Se darán 253 saludos.
b. Se darán 171 saludos.

6. De 3 maneras.
7. Se pueden formar 120 grupos.
8. Se tiene 56 formas.
9. Se pueden hacer 715 tipos de pizza.

**Página 126**

10. Se pueden elegir de 11628 formas.

11.
a. Se pueden escoger de 376740 formas.
b. Se pueden escoger de 130130 formas.
c. Se pueden escoger de 106470 formas.

12.
a. Se pueden hacer 4060 copas de helados.
b. Se pueden hacer 3654 copas de helados.

**Página 127**

1. Jugaran en total 91 partidos.

2.
a.

| N° de sellos | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| N° de casos | 1 | 3 | 3 | 1 |

b. La probabilidad es de $\frac{3}{8}$.
c. La probabilidad es de $\frac{7}{8}$.

3.
a. La probabilidad es de 0,03.
b. La probabilidad es de 0,02.

4.
a. Hay 16 posibles resultados.

**Página 128**

b. La probabilidad es de 0,25.
c. La probabilidad es de 0,31.
d. La probabilidad es de $\frac{1}{8}$.

5. La probabilidad de que no salga seleccionado es 0,62.

**6.**

**a.** Se pueden formar 252 equipos.

**b.** Se pueden formar 4368 equipos.

**c.** La probabilidad es de 0,1.

**7.** Se pueden formar 24 palabras.

**Página 129**

**8.**

**a.** Se pueden ordenar de 479001600 formas.

**b.** Se pueden ordenar de 362880 formas.

**9.**

**a.** Se pueden escoger de 15 formas diferentes.

**b.** La probabilidad es de 0,66.

**c.** La probabilidad es de 0,33.

**10.** La probabilidad es de 0,033.

## Antes de continuar

**Página 130**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** D | **4.** D | **7.** D |
| **2.** C | **5.** D | **8.** C |
| **3.** B | **6.** C | **9.** A |

**Página 131**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **10.** D | **12.** A | **14.** C | **16.** A |
| **11.** C | **13.** B | **15.** B | **17.** D |

## Lección 11

**Página 132**

**1.**

**a.** Discreta. **b.** Continua. **c.** Continua. **d.** Discreta

**2.**

**a.**

- Cantidad de sellos obtenidos en el experimento.
- Ω = {ccccc, cccсs, ccсsc, ccscc, cscсc, scccc, ccсss, ccssc, csscc, ssccc, ccscs, csccs, cscsc, scscc, sccsc, scccs, ssscc, ssccs, sccss, ccsss, sscsc, scssc, scscs, cscss, csscs, csssc, sssss, ssssc, ssscs, sscss, scsss, csssss}
- $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$

**b.**

- Cantidad de cincos obtenidos en el experimento
- Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) ,(6, 6)}
- $Y=\{0,1,2\}$

**c.**

- Suma de los números obtenidos.
- Ω = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (5, 6), (5, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7)}
- $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

**Página 133**

**d.**

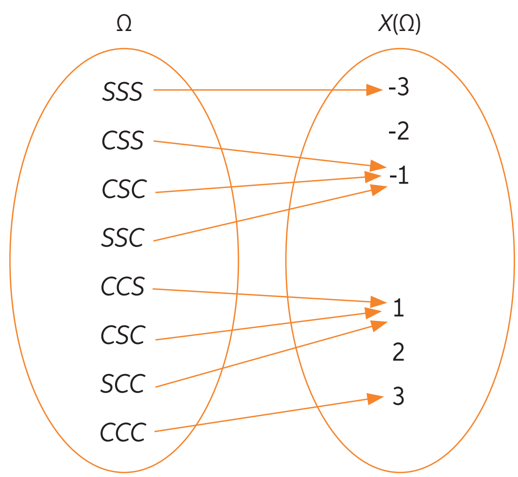
- Cantidad de vocales obtenidas en el experimento.
- Ω = {dic, emb, bri,..., eic, eei} son 84 combinaciones posibles.
- $Y = \{0, 1, 2, 3\}$

**e.**

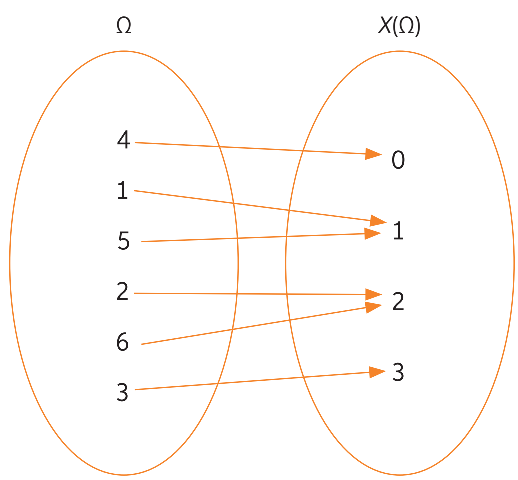
- Cantidad de divisores del número obtenido en el experimento.
- Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
- $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

**3.**

**a.**

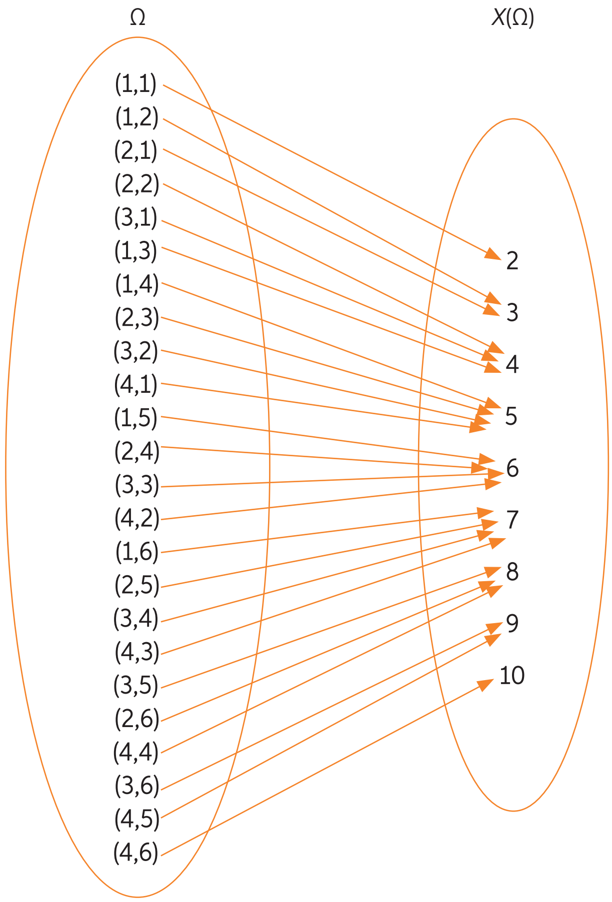



**b.**



**Página 134**

**c.**




**4.**

**a.** Cantidad de casas que tienen problemas de plagas.

**b.** Puede tomar los valores 0 a 8.

**c.** No, porque son solo 8 casas.

**d.** Si toma el valor 0 quiere decir que la casa no está infectada. La empresa no debe desinfectar el sector.

**5.**

**a.** Es espacio muestral es Ω = {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 2}, {3, 1}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 1}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 6}, {6, 2}, {6, 3}, {6, 4}, {6, 5}}

**b.** $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30\}$

**Página 135**

**c.** Es espacio muestral es Ω = {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 2}, {3, 1}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 1}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 6}, {6, 2}, {6, 3}, {6, 4}, {6, 5}, {1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 4}, {5, 5}, {6, 6}}

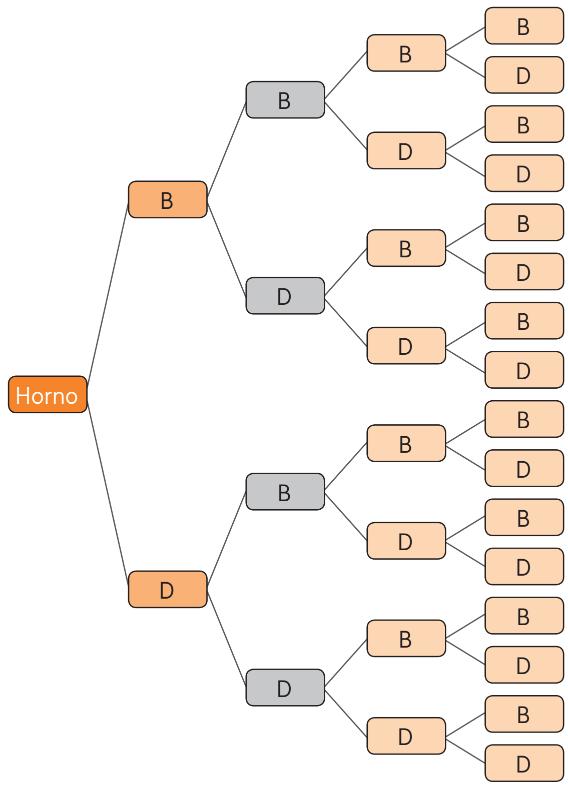
**d.** Si cambia, se agregan todos los cuadrados perfectos.

**6.**

**a.** Se revisan el 5 %

**b.** Es incorrecta la afirmación, debe ser $\frac{600!}{570!30!}$.

**c.**




**d.** $2^{30}$

**e.** Llegó a ese resultado considerando todas las combinaciones posibles entre los hornos defectuosos o buenos y la muestra, entonces $\frac{30!}{(30-5)!5!} = \frac{30!}{(30-25)!25!} = 142\,506$.

**Página 136**

**1.**

**a.** Falso, la probabilidad de la variable aleatoria esta entre 0 y 1. Incluidos.

**b.** Verdadera.

**c.** Verdadera.

**d.** Falso, puede tomar cualquier valor.

**2.**

**a.** Se compone de 4 elementos o combinaciones.

**b.** Ω = {{2, 4, 5}, {2, 4, 7}, {4, 5, 7}, {2, 5, 7}}

**c.** $Y = \{2, 3\}$

**d.** $P(X = 2) = \frac{3}{4}$ y $P(X = 3) = \frac{1}{4}$.

**e.** Es más probable que salgan 2 primos.

**Página 137**

**3.**

**a.** $p = 0{,}7$. Respuesta variable.

**b.** $p = 0{,}2$. Respuesta variable.

**c.** $p = 0{,}18$. Respuesta variable.

**d.** $p \approx 0{,}15$. Respuesta variable.

## Página 138

**4.**

**a.** $Y = \{0, 1, 2, \dots, k\}$ donde $k$ puede ser 20 y depende de la cantidad de días hábiles del mes.

**b.** El valor de la variable es 0.

**c.** La probabilidad es de 0,3.

**d.** La probabilidad es de 0,55.

**e.** La probabilidad es de 0,35.

**5.**

**a.** La probabilidad no puede ser negativa. Además, la suma de las probabilidades no es 1.

## Página 139

**b.** La suma de las probabilidades no es 1.

**6.**

**a.** Sumar e igualar a 1 las probabilidades de ambos experimentos respectivamente. Luego, formar un sistema de ecuaciones y resolverlo.

**b.** $a = 0{,}2$ y $b = 0{,}4$.

**c.** La probabilidad es de 0,4.

**d.** La probabilidad es de 0,4.

**e.** La probabilidad es de 0,6.

**f.** La probabilidad es de 0,6.

**g.** La probabilidad es de 1.

## Página 140

**1.**

**a.** $Y = \{0, 1, 2, 3\}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,3 | 0,5 | 0,1 | 0,1 |

**b.** $Y = \{0, 1, 2, 3\}$

| $x\,i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,25 | 0,15 | 0,35 | 0,25 |

**c.** $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,3 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,1 |

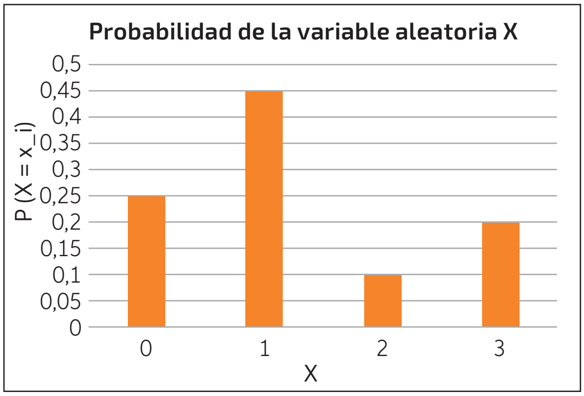
**d.** $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

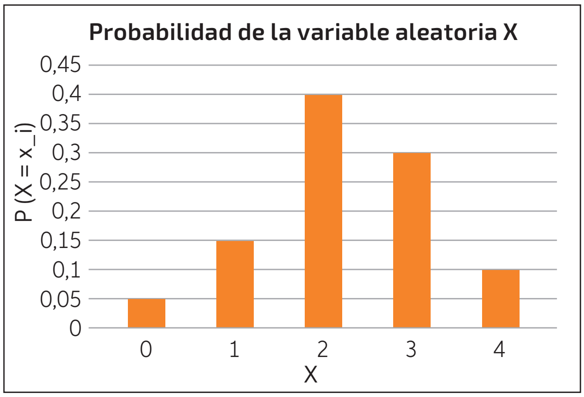
## Página 141

**2.**

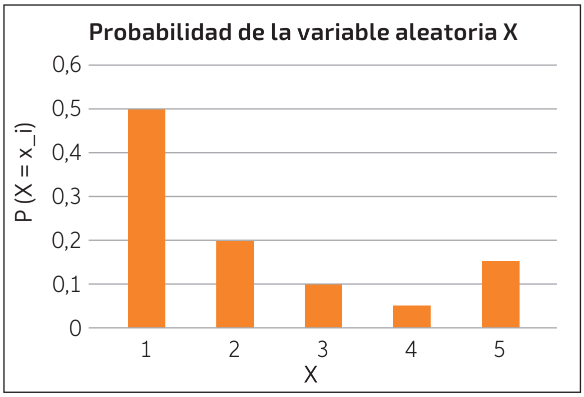
**a.**




**b.**




**c.**

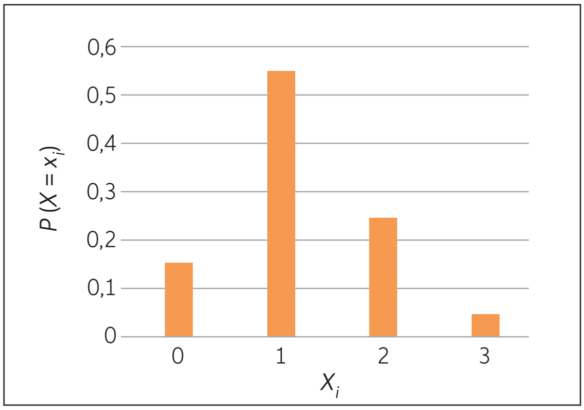


**Página 142**

**3.**

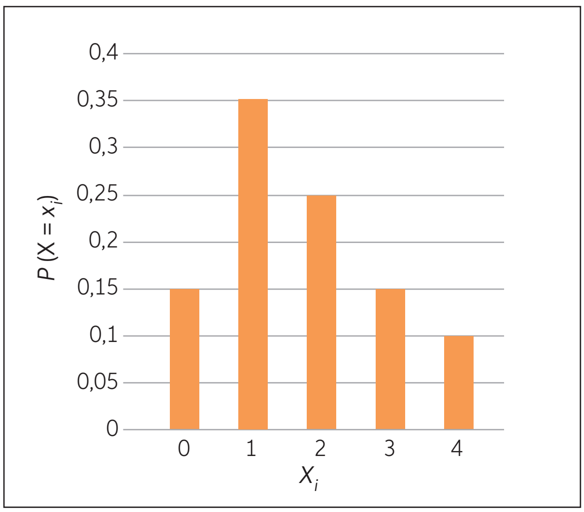
**a.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X \le x_i)$ | 0,15 | 0,7 | 0,95 | 1 |




**b.**

| $x\,i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \le x\,i)$ | 0,15 | 0,5 | 0,75 | 0,9 | 1 |




**Página 143**

**4.**

**a.** Es el número de galletas que pueden extraer una persona de una bolsa, al azar.

**b.** El recorrido es {0,1,2,3,4,5}.

**c.** Lo menos probable es obtener 5 galletas y lo más probable son 4 galletas.

**d.**

| $x\,i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \le x\,i)$ | 0,05 | 0,2 | 0,45 | 0,65 | 0,95 | 1 |

**e.** La probabilidad es de 0,45.

**f.** La probabilidad es de 0,25 .

## Antes de continuar

**Página 144**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** B | **3.** C | **5.** D | **7.** A |
| **2.** B | **4.** C | **6.** C | |

**Página 145**

| | | |
|---|---|---|
| **8.** B | **10.** A | **12.** A |
| **9.** C | **11.** C | |

## Lección 12

**Página 146**

**1.**

**a.** Falso, la probabilidad más alta es viajar en bus.

**b.** Verdadera.

**c.** Verdadera.

**d.** Verdadera.

**e.** Verdadera.

**f.** Verdadera.

**g.** Falso, solo un 45 %.

**Página 147**

**2.**

**a.** En el 2017 fue mayor la diferencia.

**b.** La probabilidad es de 0,65.

**c.** La mayor probabilidad fue en el año 2003.

**d.** Respuesta de reflexión personal.

**Página 148**

**3.**

**a.** El rango de edad es 55+ años.

**b.** El rango que utiliza más es 18-24 años.

**c.** La gente mayor se comunica por WhatsApp.

**4.**

**a.** El pescado enlatado.

**b.** La probabilidad es de 0.84.

**Página 149**

**1.**

**a.** Conviene más jugar en la maquina B, tiene una mayor probabilidad de ganar.

**b.** Conviene más jugar en la maquina B, tiene mayor probabilidad que la maquina A.

**2.**

**a.** Le convine la empresa A, porque tiene una probabilidad mayor de ganancia.

**b.** Le conviene la empresa A, tiene mayor probabilidad de ganancia.

**c.** Conviene la empresa A, porque tiene mayor probabilidad de ganancia en dos de sus tipos de fondo.

**d.** La empresa A y el fondo moderado, no se arriesga mucho y tiene mayor probabilidad de ganancia.

**Página 150**

**3.**

**a.** El modelo RJ-48. **b.** El modelo AS-20.

**4.**

**a.** La probabilidad es de 0,15.

**b.** La probabilidad es de 0,45.

**Página 151**

**c.** Las probabilidades de que saquen amarilla A y B es 0,5; B y C 0,45; C y A es 0,45.

**d.** Las probabilidades son: azul 0,65; verde 0,95; rojo 0,7 y amarillo 0,7

**e.** El color amarillo.

**f.** La probabilidad es de 0,5.

**5.**

**a.** El montón B.

**b.** Se debe elegir la opción figura.

**Página 152**

**1.**

**a.** Subjetiva.

**b.** Subjetiva

**c.** Frecuencial.

**d.** Clásica.

**e.** Frecuencial.

**2.**

**a.** Falso, es la probabilidad clásica.

**b.** Verdadera.

**c.** Falso, es una probabilidad clásica.

**d.** Verdadero.

**3.**

**a.** Respuesta variable. Por ejemplo, Al lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número impar? Justificación: se tienen la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos totales.

**Página 153**

**b.** Respuesta variable. Por ejemplo, Al lanzar un dado 10 veces, se anotan las veces que cae el número 3. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial? Justificación: Al aumentar el número de lanzamientos la probabilidad frecuencial se acerca a la probabilidad clásica.

**c.** Respuesta variable. Por ejemplo, Dado que hay nubes en el cielo hay un 20% de probabilidad de que llueva mañana. Justificación: Es juicio individual de la ocurrencia del evento.

**4.**

**a.** En algún momento el cielo fue rojizo al atardecer y ocurrió un terremoto.

**b.** No, ya que pudo ser coincidencia y no hay datos concretos.

**c.** La probabilidad subjetiva.

**5.**

**a.**

- Está no es una probabilidad subjetiva y no está dando su opinión.
- Si se consulta a un experto al investigar sobre un fenómeno que involucra azar, este podría ser una interpretación probabilística clásica o frecuencial, ya que está realizando un estudio.

**b.**

- Están definidas al revés.
- La probabilidad subjetiva es la que apela a la intuición y la probabilidad clásica se centra en la regla de Laplace.

**Página 154**

**c.**

- No es la definición de probabilidad clásica.
- Se puede afirmar que el conteo de ocurrencias de un evento específico observando muchas repeticiones de un experimento está asociado a la probabilidad frecuentista.

**d.**

- No es probabilidad clásica
- Si la variable de estudio de un experimento es “Número de estudiantes que reprueban un ramo en la universidad”, es conveniente dar a los resultados una interpretación probabilística frecuentista.

**6.**

| Diferencias | Similitudes |
|---|---|
| La frecuentistas aproxima el valor de la probabilidad teórica, mientras que la clásica ya está dado.<br>La frecuentista se anota los números de ocurrencia de un evento, mientras que en la subjetiva es una idea de la ocurrencia. | Estudian la ocurrencia de un evento. |

**7.**

**a.** Es subjetiva porque no le entrego datos.

**Página 155**

- **b.** Faltaron las estadísticas del evento.
- **c.** Respuesta de reflexión personal.

**8.**

- **a.** Con probabilidad clásica.
- **b.** La probabilidad de que el primero Acierte(A) es de $\frac{1}{10}$ y que No Acierte (NA) es de $\frac{9}{10}$. Si el primero no acierta, el segundo estudiante tiene una probabilidad de $\frac{1}{5}$ de acertar y $\frac{4}{5}$ de no acertar. Así, sucesivamente el último alumno tiene una probabilidad de que acierte es $\frac{1}{10}$. Por lo tanto, el alumno no tiene la razón, todos los alumnos tienen la misma probabilidad de acertar.
- **c.**
  - Frecuencial: Hacer el experimento varias veces y ver si el alumno tenía la razón.
  - Clásica: situación anterior.
  - Subjetiva: El alumno afirma que al ser el 10 personas el tiene un 10% de probabilidad de ganar.

## Antes de continuar

**Página 156**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** C | **3.** C | **5.** D |
| **2.** B | **4.** D | |

**Página 157**

| | | |
|---|---|---|
| **6.** B | **8.** A | **10.** D |
| **7.** A | **9.** B | |

GUÁRDALO EN UN LUGAR ADECUADO

CUIDA SUS HOJAS Y NO DOBLES SUS ESQUINAS

ÚSALO ALEJADO DE COMIDAS Y BEBIDAS

TÓMALO CON CUIDADO

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

sm

mifuturo.cl

Infórmate antes de elegir

ISBN 978-956-403-079-1