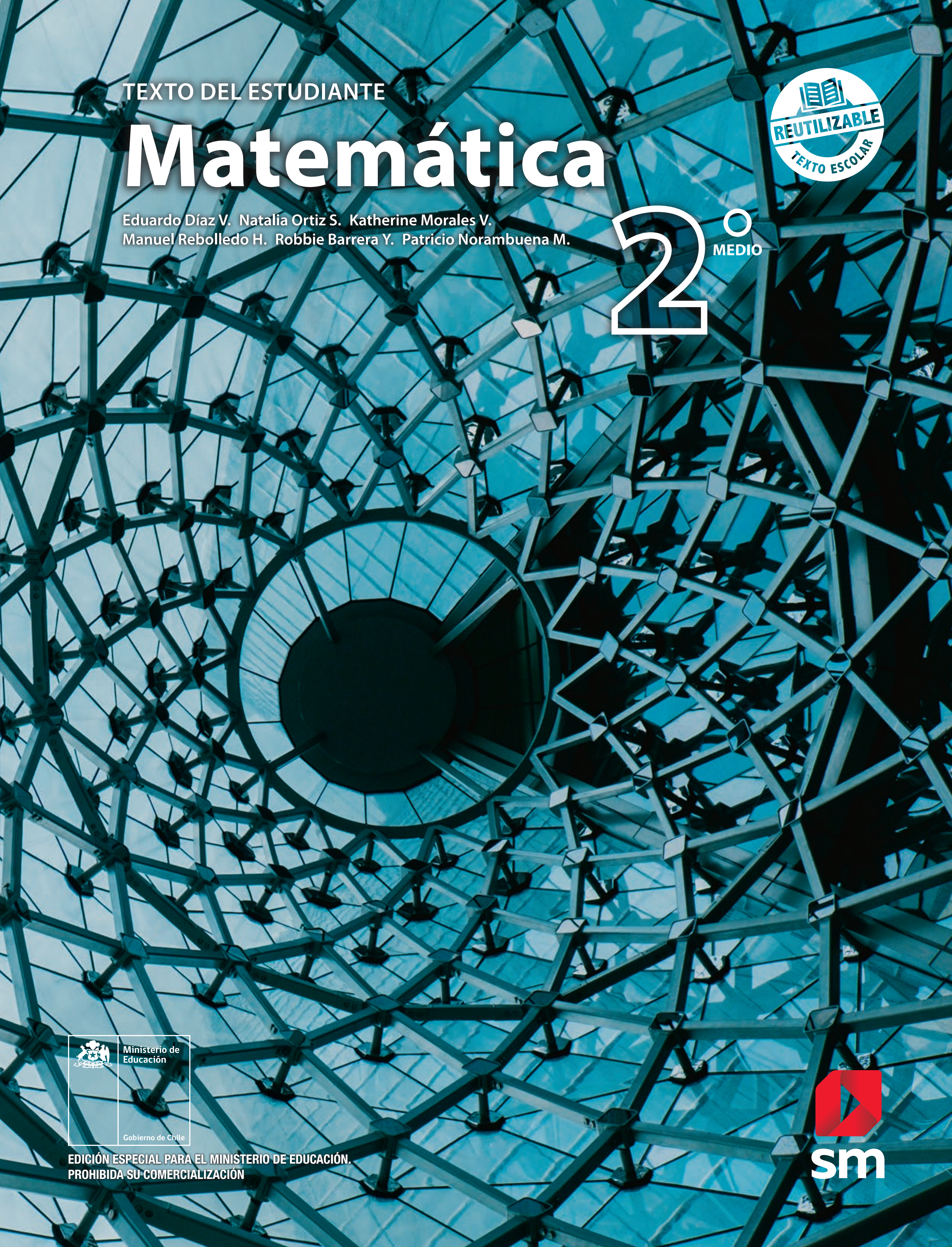


TEXTO DEL ESTUDIANTE

Matemática

Eduardo Díaz V. Natalia Ortiz S. Katherine Morales V.
Manuel Rebolledo H. Robbie Barrera Y. Patricio Norambuena M.

2° MEDIO

REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

sm

2° medio

MATEMÁTICA
TEXTO DEL ESTUDIANTE

Eduardo Díaz Valenzuela
Licenciado en Educación Matemática y Computación
Profesor de Estado en Matemática y Computación
Natalia Ortiz Solís
Licenciada en Educación Matemática y Computación
Profesora de Estado en Matemática y Computación
Patricio Norambuena Morales
Licenciado en Educación Matemática y Computación
Katherine Morales Valderrama
Licenciada en Educación Matemática y Computación
Manuel Rebolledo Hernández
Licenciado en Matemática
Robbie Barrera Yáñez
Profesor de Estado en Física y Matemática

La fotografía de la portada corresponde al edificio con forma de cono de Sathorn square, ubicado en Bangkok, Tailandia.

En este texto se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira Nar, Exo 2 y Ames.

En el desarrollo del Texto del estudiante de Matemática 2° medio SM, participó el siguiente equipo:

Dirección editorial
Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación área Matemática
Lucía Donoso Suárez

Edición
Patricio Norambuena Morales

Ayudante de edición
Jessica Vásquez Ojeda

Autoría
Eduardo Díaz Valenzuela
Natalia Ortiz Solís
Katherine Morales Valderrama
Patricio Norambuena Morales
Manuel Rebolledo Hernández
Robbie Barrera Yáñez

Consultoría
Verónica Muñoz Correa

Corrección de estilo y prueba
Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario
Tomás Bralić Muñoz
Yaritza Dinamarca Castro

Dirección de arte y diseño
Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño
Gabriela de la Fuente Garfias

Iconografía
Vinka Guzmán Tacla

Diseño y diagramación
Williams Gálvez Baettig

Fotografías
Banco de imágenes SM
Shutterstock
Wikimedia Commons

Jefatura de planificación
Andrea Carrasco Zavala

Gestión de derechos
María Loreto Ríos Melo

Este texto corresponde al primer año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 193/2019, del Ministerio de Educación de Chile.

ISBN: 978-956-403-070-8 / Depósito legal: 2020-A-9277

Impreso en Chile por A IMPRESORES S.A.

Se termina de imprimir esta edición de 221.122 ejemplares en octubre de 2023.

Cuarto año de uso facultativo / Cantidad de uso autorizada: 245.691

En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como “los niños”, “los padres”, “los hijos”, “los apoderados”, “profesores” y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

Presentación

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

El pensamiento matemático favorece el desarrollo de una actitud reflexiva y la comprensión de razonamientos y conceptos. La aplicación de la Matemática en diversos ámbitos permite cuantificar, razonar, representar y comunicar relaciones que se dan en el entorno.

Este texto está dividido en cuatro grandes unidades:

1. Números.
2. Álgebra y funciones.
3. Geometría.
4. Probabilidad y estadística.

Estos íconos te ayudarán a guiarte en tu Texto.

Preguntas metacognitivas.

◆ Actividades que desarrolla habilidades de orden superior (analizar, evaluar y crear).

72 a 76

Páginas del Cuaderno de Actividades asociadas al tema trabajado.

∀: para todo.
∃: existe.

Ayudas para comprender y realizar las actividades.

Para comprobar.

Para ingresar, debes copiar el link en la barra de direcciones.

Índice

Unidad 1 Números

En esta Unidad aprenderás sobre el conjunto de los números reales. Además, aprenderás sobre los logaritmos y sus propiedades.

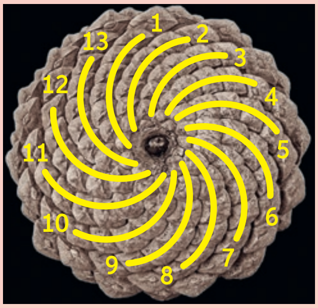
1. Los patrones espirales del girasol en la imagen corresponden a 55 antihorarios y 34 en sentido horario. ¿Qué número se obtiene al dividir 55 : 34?
2. ¿Consideras que el resultado anterior es cercano al número φ? Comenta con tu curso.

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP007A

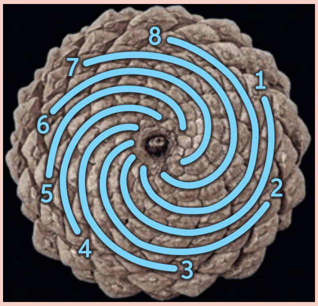
El número de oro, denotado por la letra griega φ (phi o fi), es un número equivalente al resultado de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, es decir 1,61803…

La sucesión de Fibonacci es un patrón de números fuertemente vinculado con el número de oro. Para formarla, se comienza con los números 1 y 1, el siguiente número, el 2, se forma a partir de los dos primeros (1 + 1), luego el 3 es (2 + 1), 5 es (3 + 2). Si continúas, obtendrás las sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 y así sucesivamente.

El mundo natural está repleto de matemáticas, incluso las semillas y los conos de pino se encuentran organizadas en patrones espirales. Por ejemplo, si contamos en sentido de las agujas del reloj los patrones:



Y luego en contra de las agujas del reloj:



Corresponden a dos números seguidos de la sucesión de Fibonnaci, cuya división $\frac{13}{8}$ = 1,625 se acerca a φ.

3. ¿Por qué crees que phi no pertenece al conjunto de los números racionales?, ¿qué característica debería tener para que así fuera?

4. Investiga la relación del número φ con el arte, la arquitectura y el cuerpo humano.

Activo lo que sé

1. Resuelve las ecuaciones y determina el o los conjuntos numéricos al que pertenece(n) la solución.

a. $x + 2 = 5$

b. $5x - 12 = -7$

c. $22 + 5x = -3$

2. Clasifica los números en decimal finito, infinito periódico o semiperiódico.

a. $0{,}12$	**d.** $5{,}\overline{797}$	**g.** $15{,}\overline{15}$
b. $2{,}\overline{5}$	**e.** $\frac{14}{20}$	**h.** $\frac{24}{18}$
c. $\frac{7}{30}$	**f.** $4{,}622$	**i.** $\frac{99}{8}$

3. Expresa cada número decimal como fracción irreductible.

a. $8{,}2$ **b.** $1{,}\overline{3}$ **c.** $5{,}0\overline{24}$

4. Una torre tiene hasta los $\frac{3}{8}$ de su capacidad. Si se agregan 1 600 L de agua, se llena. ¿Qué capacidad tiene la torre?

5. Resuelve las operaciones.

a. $1 + \frac{1}{3} - 0{,}\overline{3}$ **b.** $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} : \frac{1}{2} - \frac{7}{15}$

6. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Todo número elevado a cero es igual a 1.

b. Si la base de una potencia es menor que cero y su exponente es par, el resultado es positivo.

7. Resuelve las multiplicaciones utilizando productos notables.

a. $(x + 9)(x + 9)$

b. $(3x^2 - 7)(3x^2 + 1)$

8. Aplica las propiedades de las potencias para resolver. Expresa el resultado final como potencia de exponente positivo.

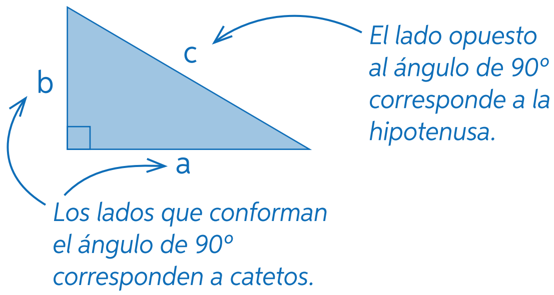
a. $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{1{,}5^{-4}}{0{,}25^2}$

b. $\left[\left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^8\right]^{-3}$

c. $\frac{12^{-3} \cdot (9^8)^{-2} \cdot 12^{-1}}{(9^4 : 9^6)^8}$

9. Resuelve los siguientes problemas utilizando el teorema de Pitágoras.

Recuerda que $a^2 + b^2 = c^2$



a. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 24 cm y la hipotenusa, 40 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

b. Se afirma que un triángulo de lados 5, 7 y 35 cm es rectángulo ya que:

$$5^2 + 7^2 \longrightarrow (7 \cdot 5)^2 \longrightarrow 35^2$$

¿Cuál fue el error cometido?

10. Aproxima a la décima los siguientes números mediante el método de redondeo.

a. $3{,}\overline{051}$ **b.** $-3{,}\overline{57}$

11. Aproxima a la centésima los siguientes números mediante el método de truncamiento.

a. $9{,}\overline{915}$ **b.** $-0{,}\overline{891}$

Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas? ¿Cuáles te resultaron más difíciles?
- ¿Hay algún contenido que debas reforzar? ¿Cómo lo harás?

Los números reales

El conjunto de los irracionales ($\mathbb{Q}^*$)

¿Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 4 cm? ¿Qué procedimiento usarías para determinarla?

Objetivo: Conocer el conjunto de los números reales.

1. ◆ En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando una regla y calculadora científica.

a. Construyan en su cuaderno un cuadrado cuyo lado mida 1 cm. Tracen la diagonal y mídanla con una regla. ¿Cuál es su valor? Anótenlo.

b. Apliquen el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado. Luego, ingresen este número a la calculadora. ¿Cuántos decimales obtuvieron? ¿A qué tipo de decimal corresponde?

c. ¿Por qué el número obtenido no pertenece al conjunto de los números racionales? Expliquen y compartan sus respuestas con sus compañeros de curso.

Existen números que tienen infinitas cifras decimales sin períodos. Este tipo de números, como $\sqrt{2}$, son denominados números irracionales.

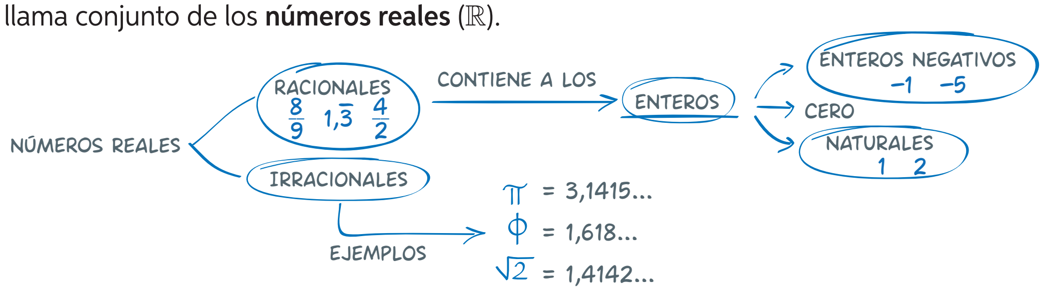
El conjunto de los **números irracionales** se simboliza por $\mathbb{Q}^*$, y está formado por todos los números que no se pueden representar como un número racional, ya que su parte decimal es infinita no periódica, es decir, no se pueden escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$.

Algunos números irracionales son:

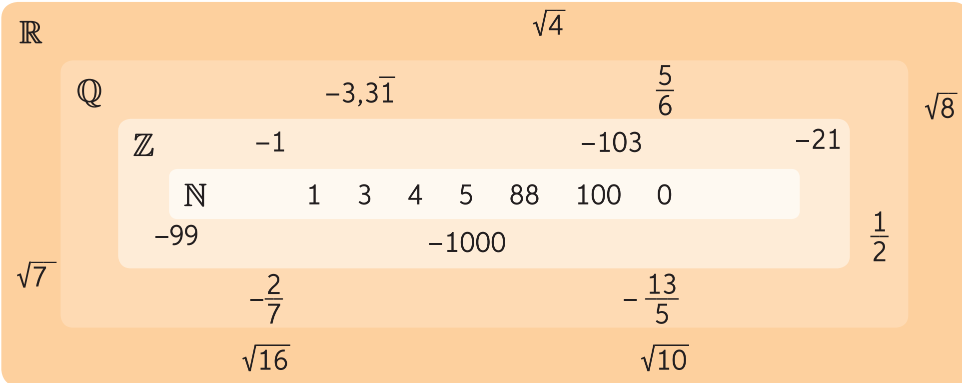
$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373...$$

$$\pi = 3{,}14159265358979...$$

El conjunto que contiene tanto a los números racionales como a los irracionales se llama conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$).



2. Analiza el siguiente esquema de conjuntos de números reales. Luego, responde.



a. Analiza los elementos que se anotaron en cada conjunto. ¿Se encuentran todos bien anotados?

b. ¿Cuál es el error que se cometió al realizar el esquema anterior? Compara tu respuesta en parejas.

c. Comenta con tu curso: ¿Qué precaución tendrías al construir un diagrama similar?

3. Clasifica los siguientes números en racionales ($\mathbb{Q}$) o irracionales ($\mathbb{Q}^*$).

a. -18

b. 0

c. $\sqrt{3}$

d. $-0{,}5\overline{7}$

e. $-\frac{21}{3}$

f. $\sqrt{36}$

g. $2{,}0\overline{8}$

h. $1{,}\overline{9}$

4. Escribe:

a. Cinco números racionales.

b. Cinco números irracionales.

c. Cinco números reales.

d. Cinco números enteros que no sean números naturales.

5. ◆ Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica las falsas con un contraejemplo.

a. Todo número decimal infinito periódico es racional.

b. El 0 es un número racional e irracional.

c. Todo número entero es un número racional.

d. Existen números reales que no son racionales ni irracionales.

Para concluir

a. ¿Qué diferencia(s) hay entre los números irracionales y los racionales? Explica.

b. ◆ Utiliza la calculadora y determina el valor de cada raíz cuadrada. Para ello, considera 3 cifras decimales: $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$. ¿Qué resultados son números enteros? En el caso de los números primos, ¿sus raíces cuadradas son números irracionales? ¿Por qué crees que ocurre esto?

4

Calcular en $\mathbb{R}$

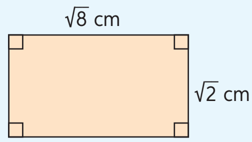
¿Pertenecen todas las raíces cuadradas al conjunto de los números irracionales? ¿por qué?

¿Qué características tienen las raíces cuadradas exactas?

Objetivo: Calcular operaciones con números reales.

1. Marta participó de un torneo matemático, donde se le planteó el siguiente desafío:

¿Cuál es el área del rectángulo?



Ella respondió correctamente, realizando el siguiente desarrollo:

Área = largo · ancho = $\sqrt{8}$ cm · $\sqrt{2}$ cm = $\sqrt{16}$ cm^2 → 4 cm^2

a. Explica el procedimiento que utilizó Marta para calcular el área del rectángulo.

b. ¿Cómo comprobarías el resultado de Marta? Comenta con tus compañeros

2. Explica el procedimiento que realizó correctamente Marta en un siguiente desafío, para calcular la razón entre el ancho y el largo del rectángulo anterior.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ → La razón entre el ancho y largo es 1 : 2, o bien, el ancho es la mitad del largo.

Para multiplicar y dividir raíces con igual índice, se multiplican o dividen las cantidades subradicales y se conserva el índice.

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Ejemplos: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

$2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{8} = (2 \cdot 3)\sqrt{7 \cdot 8} = 6\sqrt{56}$

- $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$, con $b \neq 0$

Por ejemplo: $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{6 : 3} = \sqrt{2}$

Recuerda que:

Índice radical

$\sqrt[2]{49} = 7$

Cantidad subradical *Raíz*

3. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}$

b. $6\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{18}$

c. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{b}$

d. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

e. $(3\sqrt{7} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$

f. $5\left(\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\right)$

g. $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

h. $\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}\right)^2$

4. ◆ Analiza el siguiente procedimiento de descomposición de raíces.

Paso 1: Busca un producto entre dos números donde al menos uno de los factores tenga raíz cuadrada exacta.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 2: Separa en una multiplicación de raíces, resolviendo la que tiene solución exacta.

Paso 3: Expresa la multiplicación entre el número racional y la raíz.

a. ¿Por qué se eligió 4 y 3 para descomponer la raíz de 12?

b. ¿Qué hubiera ocurrido si se hubiera descompuesto la raíz de 12 en 6 y 2? ¿se hubiera podido descomponer la raíz?

5. Descompón las siguientes raíces.

a. $\sqrt{20}$ **c.** $\sqrt{45}$ **e.** $\sqrt{80}$ **g.** $\sqrt{200}$

b. $\sqrt{18}$ **d.** $\sqrt{32}$ **f.** $\sqrt{108}$ **h.** $\sqrt{147}$

Para resolver **adiciones y sustracciones** con raíces cuadradas, puedes utilizar un procedimiento similar al que se usa para reducir términos semejantes, o sea, agrupar. Para agrupar las raíces cuadradas, estas deben tener igual cantidad subradical, por ejemplo:

$$\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{2} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

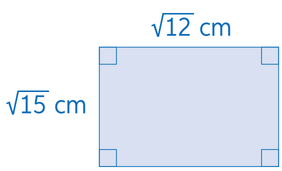
6. Resuelve.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ **c.** $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$ **e.** $4\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

b. $5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$ **d.** $-2{,}3\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 0{,}8\sqrt{2}$ **f.** $7\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{125}$

GEOMETRÍA

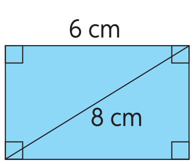
7. ◆ Calcula el área de cada figura. Luego, simplifica las raíces cuando sea posible. Compara el resultado con tu compañero.



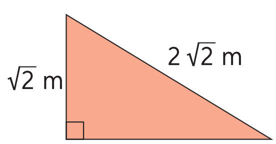
El área del rectángulo corresponde a:
área = base · altura

$$= \sqrt{12} \cdot \sqrt{15}$$
$$= \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3}$$
$$= 6\sqrt{5}\ cm^2$$

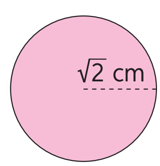
a.



b.



c.



La operatoria de números reales cumple con las siguientes propiedades:

- El opuesto de un irracional es irracional.
  Ejemplo: $\pi \in \mathbb{Q}^*$, por lo que $-\pi \in \mathbb{Q}^*$.
- El inverso multiplicativo de un irracional es irracional.
  Ejemplo: $\frac{1}{\pi}$ es el inverso de π, por lo que $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{Q}^*$
- La adición o sustracción entre un racional y un irracional es irracional.
  Ejemplo: $3 + \pi \in \mathbb{Q}^*$
- El producto entre un racional distinto de cero y un irracional es irracional.
  Ejemplo: $5 \cdot \pi = 5\pi$ es irracional.
- El resultado del producto entre dos irracionales puede ser un racional o un irracional.
  Ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$
  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \in \mathbb{Q}^*$

Para la adición

$a + b \in \mathbb{R}$ (Clausura)

$a + b = b + a$ (Conmutatividad)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad)

$a + 0 = a$ (Elemento neutro)

$a + (-a) = 0$ (Elemento inverso)

Para el producto

$a \cdot b \in \mathbb{R}$ (Clausura)

$a \cdot b = b \cdot a$ (Conmutatividad)

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Asociatividad)

$a \cdot 1 = a$ (Elemento neutro)

$a \cdot a^{-1} = 1$ (Elemento inverso, $a \neq 0$)

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(Distributividad del producto sobre la suma)

8. Determina si los siguientes números son racionales o irracionales.

a. $1 + \sqrt{16}$ **b.** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ **c.** $\sqrt{50} \cdot \sqrt{3{,}4}$

9. ◆ Verifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica con un ejemplo en cada caso.

a. El producto de dos números irracionales siempre es un número irracional.

b. Todos los números irracionales son números reales.

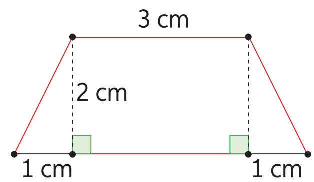
c. Todo número real es un número racional.

d. Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas

e. Al restar números irracionales, el resultado es un número irracional.

Actividades de profundización

10. Determina el perímetro y el área del siguiente trapecio isósceles. Luego, identifica si los resultados anteriores corresponden a números racionales o irracionales.



Para concluir

a. ◆ Escribe dos números tales que uno sea racional, el otro irracional y su producto sea racional.

b. ◆ Se quiere construir un cuadrado con área igual a la de un círculo de radio 1 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿corresponde a un número racional o irracional?

5 a 7

Aproximación de números irracionales

Objetivo: Aproximar números irracionales.

¿Qué estrategias de aproximación estudiaste en cursos anteriores?
¿En qué situaciones de la vida cotidiana has realizado aproximaciones de números?

No se puede obtener una representación decimal exacta de un número irracional. Por tanto, aproximar un número irracional es representar su valor a través de un resultado lo suficientemente cercano.

- Si al aproximar un número irracional, el valor que se obtiene es menor, entonces se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

Ejemplo:

*Al aproximar π = 3,14159... a la **centésima**, se tiene lo siguiente:*

3,14159...

Por defecto	Por exceso
3,14	3,15

- Una aproximación se puede hacer por redondeo o por truncamiento a una determinada cifra decimal.

Redondeo: Se considera la cifra siguiente a la cual se quiere aproximar el número. Si esta es mayor o igual a 5, se suma 1 a la cifra anterior. Si esta es menor que 5, entonces la cifra se mantiene igual.

Truncamiento: se escribe un número hasta una determinada cifra decimal.

Ejemplo:

*Al aproximar e = 2,7182818284... a la **milésima**, se tiene que:*

e = 2,7182818284
2 < 5

Por redondeo	Por truncamiento
2,718	2,718

1. Aproxima a la centésima los siguientes números irracionales según lo que se indica a continuación:

Por exceso | Por defecto | Por redondeo

a. $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$ **b.** $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ **c.** $\pi = 3{,}14159\ldots$

2. Utiliza una calculadora para determinar una aproximación de las siguientes raíces redondeadas a la milésima.

a. $\sqrt{5}$ **c.** $\sqrt{13}$ **e.** $\sqrt{24}$

b. $\sqrt{11}$ **d.** $\sqrt{19}$ **f.** $\sqrt{37}$

3. Escribe en cada caso una aproximación (dos decimales) por truncamiento y por redondeo de las siguientes operaciones. Usa calculadora.

a. $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b. $\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \sqrt{10}$

c. $\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{18}$

d. $\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{3}$

e. $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

f. $\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

g. $-2{,}1\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} + 0{,}1\sqrt{5}$

h. $\frac{2}{3}\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 2\sqrt{8}$

El **error** que se obtiene al hacer una aproximación de un número irracional se calcula determinando la diferencia en valor absoluto entre el número irracional y su aproximación.

Por ejemplo, el error al aproximar por redondeo a la centésima el número irracional ϕ:

$$\phi = 1{,}6180339\ldots \qquad 8 \geq 5$$

Por redondeo se tiene: 1,62 y el error de aproximación es:

$$|1{,}6180339\ldots - 1{,}62| = |-0{,}0019661\ldots| = 0{,}0019661\ldots \approx 0{,}00196$$

El error de aproximación es cercano a 0,00196.

4. Aproxima por redondeo a la centésima los siguientes números irracionales. Luego, determina el error de aproximación.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{8}$

d. $\sqrt{11}$

e. $\sqrt{18}$

f. $\sqrt{21}$

g. $\sqrt{26}$

h. $\sqrt{30}$

Hípaso de Metaponto (siglos V-VI a.C.) fue un filósofo y matemático de la escuela pitagórica, pero fue expulsado de ella por probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, hecho que atentaba contra la creencia de que el universo podía ser explicado mediante el uso de números naturales y racionales.

5. En una calculadora, el valor de $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$ y $\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$ y de $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 4{,}881819289\ldots$ A partir de esta información realiza lo siguiente.

a. Redondea los valores de las raíces a tres cifras decimales y súmalos; luego calcula el error de tu resultado respecto del que entrega la calculadora.

b. Repite el proceso anterior, pero ahora redondeando los números a dos cifras decimales.

Para concluir

¿Qué diferencias y similitudes observas en la aproximación de números irracionales, comparados con la de los números racionales?

8

Orden y ubicación de números reales en la recta numérica

Objetivo: Ordenar y ubicar números irracionales en la recta numérica.

¿Qué recuerdas del teorema de Pitágoras?
¿Cómo ubicarías una raíz cuadrada en la recta numérica?

Para comparar números reales, y en particular, números irracionales, estos se pueden representar en forma decimal, tal como se hace con los números racionales.

Ejemplo: Ordena de menor a mayor los números $\sqrt{6}$; 2,45; $\frac{5}{2}$ y 2,42.

Usando la calculadora, obtenemos que $\sqrt{6} = 2,449...$ y $\frac{5}{2} = 2,5$. Luego, el orden es:

$2,42 < \sqrt{6} < 2,45 < \frac{5}{2}$

Otra forma de ordenar números si hay raíces cuadradas, se considera que mientras mayor sea un número, mayor es su expresión al cuadrado.

Ejemplo: Ordena de menor a mayor los números $2\sqrt{5}$; 4,3; $\sqrt{19}$ y $3\sqrt{2}$.

Elevamos todos los números al cuadrado:

$(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 5 = 20$

$(4,3)^2 = 4,3 \cdot 4,3 = 18,49$

$(\sqrt{19})^2 = \sqrt{19} \cdot \sqrt{19} = 19$

$(3\sqrt{2})^2 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot 2 = 18$

Luego ordenamos de menor a mayor: $3\sqrt{2} < 4,3 < \sqrt{19} < 2\sqrt{5}$

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números. Guíate por el ejemplo anterior.

a. $\sqrt{35}$; 4,6; $4\sqrt{3}$
c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{39}{20}$
e. $\sqrt{5}$; 2,23; 2,24
b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$
d. $\sqrt{2}$; 1,3; $\frac{14}{9}$
f. $\sqrt{10}$; $\frac{1}{4}$; 2,087

2. Ordena de mayor a menor los elementos del siguiente conjunto: $\{\sqrt{2}; 3; \sqrt{2,5}; \sqrt{3}; 2\}$.

GEOMETRÍA

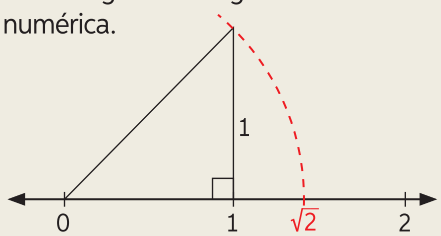
3. Para ubicar números irracionales en la recta numérica, es necesario aproximarlos, ya que tienen una cantidad infinita de cifras decimales. Para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica se puede realizar lo siguiente:

Para realizar:
gbit.cl/T21M2MP014A

PASO 1: En una recta numérica graduada de 1 en 1, se construye un triángulo rectángulo de catetos 1. La base de este es el segmento sobre la recta numérica.

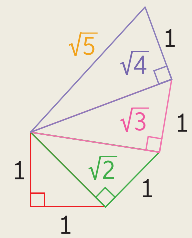
PASO 2: Con un compás se traza un arco de circunferencia con centro en 0 utilizando como radio la medida de la hipotenusa del triángulo.

PASO 3: Se marca la intersección entre el arco de la circunferencia y la recta numérica.



a. Repite el proceso para ubicar la raíz de 3 dentro de la recta numérica.

El método anterior es similar al que se utiliza para la construcción de la espiral de Teodoro de Cirene. Para construirla, se dibuja un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1. Luego, se construye un nuevo triángulo rectángulo, ya no isósceles. Los catetos de este nuevo triángulo son la hipotenusa del primer triángulo y uno perpendicular a esta y de medida 1. Este procedimiento se repite indefinidamente.



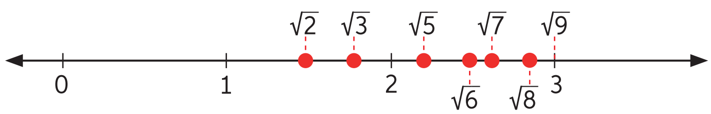
b. ¿Es correcto afirmar que $\sqrt{3}$ se encuentra entre $\sqrt{2}$ y 2? Explica.

c. ¿Entre qué números estimarías la $\sqrt{5}$? ¿Por qué?

Para saber más:
gbit.cl/T21M2MP014B

- En la recta numérica, si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces $\sqrt{a}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{b}$. Además, si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

  Ejemplo:



  Si 6 < 7, entonces $\sqrt{6} < \sqrt{7}$ y $\sqrt{6}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{7}$.

- Se puede estimar el valor de una raíz cuadrada utilizando cuadrados perfectos. Si $a^2 < x < b^2$, entonces $a < \sqrt{x} < b$ (a, b >1).

  Ejemplo:

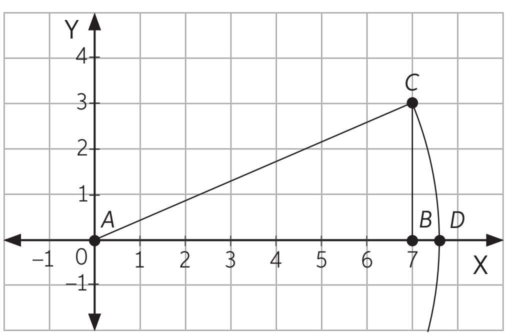
  Para estimar el valor de $\sqrt{6}$, consideramos que:

  Si $4 < 6 < 9$, entonces $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$

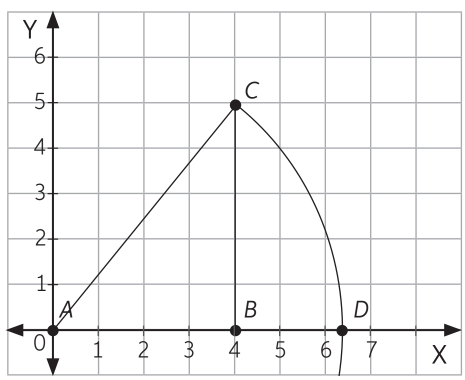
  Por lo tanto, $\sqrt{6}$ está entre 2 y 3.

4. Determina el punto *D*. Considera que en cada caso se trazó un arco de circunferencia con centro en (0,0).

a.



b.



Para concluir

a. ◆ Explica cómo ubicarías $\sqrt{21}$ en la recta numérica.

b. ◆ Explica entre qué números estimarías la $\sqrt{10}$.

9

Antes de continuar

1. Explica la diferencia entre el conjunto de los números irracionales y el de los números reales.

2. Con respecto al número $\sqrt{13}$, ¿cuál es el resultado de sumarlo con su inverso aditivo? ¿y multiplicarlo por su inverso multiplicativo?

3. Aproxima a la centésima mediante redondeo.

   a. $\sqrt{14}$ b. $2\sqrt{5}$ c. $\sqrt{10} + \sqrt{35}$

4. Resuelve.

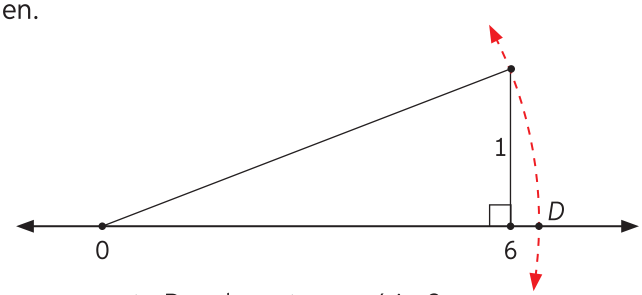
   a. $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$ b. $2{,}1\sqrt{5} + 0{,}\overline{2}\sqrt{5}$ c. $-\sqrt{7} + 3\sqrt{28} - \sqrt{63}$

5. Simplifica.

   a. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ c. $\dfrac{3\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ e. $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{50}}$

   b. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{75}$ d. $-3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$ f. $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{60} \cdot \sqrt{24}$

6. Analiza la imagen.

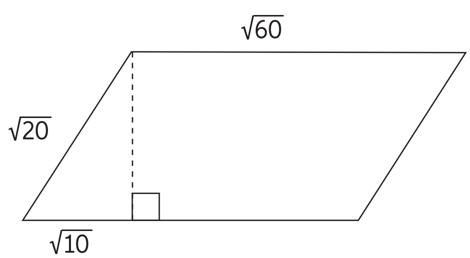


   a. ¿Qué número representa *D* en la recta numérica?

   b. Explica cómo lo supiste.

7. Ordena de menor a mayor las raíces $2\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, y $4\sqrt{3}$.

8. Calcula el área del paralelogramo. Aproxima por redondeo a dos cifras decimales.



Reflexiono

a. ¿Qué te costó más de la lección?

b. ¿Cómo pueden facilitar los cálculos las propiedades de la adición y la multiplicación?

c. Explica cómo resolviste el problema número 8.

10 y 11

Lección
2 Potencias y raíces enésimas

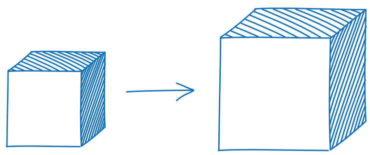
Raíz enésima

¿Qué expresión algebraica es equivalente a multiplicar *a* por sí mismo *n* veces?
¿En qué consiste el proceso de factorización prima?

Objetivo: Comprender el concepto de raíz enésima.

1. Un problema imposible de resolver en la geometría clásica, utilizando solo una regla sin graduar y compás, es la duplicación del cubo, es decir, a partir de un cubo cualquiera construir otro cuyo volumen sea el doble del inicial.

Cubo 1
$V_1 = 1\ cm^3$



Cubo 2
$V_2 = 2\ cm^3$

El volumen de un cubo de arista x es x^3.

Para abordar la duplicación del cubo, podemos suponer que tenemos uno cuya arista mide 1 cm, y deseamos construir otro cuyo volumen sea el doble.

a. ¿Cuál es el volumen del cubo inicial?

b. Si se duplica la medida de su arista, ¿por qué el volumen del segundo cubo no es el doble del volumen del cubo inicial?

c. Si el área de cada cara del cubo inicial fuese a^2 cm^2, ¿qué expresión representa la medida de la arista del cubo?

d. Al duplicar el volumen del cubo inicial, se obtiene que este es igual a 2 cm^3. ¿Qué expresión permite conocer la medida de su arista?

Se llama **raíz enésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la condición $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$. Donde $\sqrt[n]{a}$ se llama radical; a, radicando o cantidad subradical y n, índice de la raíz.

$\sqrt[4]{81} = 3$, se lee "la raíz **cuarta** de 81 es 3", pues $81 = 3^4$.

$\sqrt[3]{-125} = -5$, se lee "la raíz **cúbica** de −125 es −5", pues $-125 = (-5)^3$.

$\sqrt{0,25} = 0,5$; se lee "la raíz **cuadrada** de 0,25 es 0,5", pues $0,25 = (0,5)^2$.

Además se puede considerar lo siguiente:

- Si n es par, entonces $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Si n es impar, entonces $a \in \mathbb{R}$.

2. Calcula las siguientes raíces enésimas:

a. $\sqrt[3]{27}$ **c.** $\sqrt[3]{-216}$ **e.** $\sqrt[5]{243}$ **g.** $\sqrt[5]{32}$

b. $\sqrt[4]{81}$ **d.** $\sqrt[3]{-729}$ **f.** $\sqrt[6]{64}$ **h.** $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

3. Analiza las igualdades. Luego, escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.

a. $\sqrt[3]{625} = 25$ **b.** $\sqrt[4]{16} = 4$ **c.** $\sqrt[5]{-1024} = 4$ **d.** $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{343}$ **b.** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{1296}$ **c.** $\sqrt[4]{256} + \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{8}$

5. Determina los valores de *a* para que el resultado de la raíz sea un número real.

a. $\sqrt[4]{7 - a}$ **b.** $\sqrt[3]{a - 2}$ **c.** $\sqrt[5]{a^2 + 8}$

Biología

6. Una población de bacterias cuenta inicialmente con 3 organismos. Se sabe que se reproduce cada hora a una razón desconocida r.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Bacterias (cantidad)	3	$3 \cdot r$				

a. ¿Qué representa la *r*? ¿Qué representa el 3?

b. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

c. ◆ ¿Qué expresión algebraica representa el número de bacterias luego de *n* horas?

d. ◆ Si al cabo de 6 horas hay 192 bacterias, ¿cuál es el valor de *r*? Justifica.

Cada bacteria se multiplica *r* veces.

7. ◆ ¿Cómo explicarías las igualdades $\sqrt[n]{0} = 0$ y $\sqrt[n]{1} = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\sqrt[n]{0} = 0$ Ejemplo: $\sqrt[5]{0} = 0$
- $\sqrt[n]{1} = 1$ Ejemplo: $\sqrt[7]{1} = 1$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Ejemplo: $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{10^2} = 3 \cdot 10 = 30$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ Ejemplo: $\sqrt[4]{\frac{32}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^5}{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{2}}{3}$

Además, para *p* y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ Ejemplo: $\left(\sqrt[3]{10}\right)^4 = \sqrt[3]{10^4} = \sqrt[3]{10^3} \cdot \sqrt[3]{10} = 10 \cdot \sqrt[3]{10}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

8. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[5]{-1}$ **c.** $\sqrt[7]{128} + \sqrt[3]{-27}$ **e.** $\sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{625}$

b. $\sqrt[3]{8}$ **d.** $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ **f.** $\sqrt[9]{1} + \sqrt[11]{-1} + \sqrt{1}$

9. ¿Crees que la igualdad $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ siempre se cumple si *a* y *b* son números reales positivos? Discute con un compañero.

10. Descompón y simplifica aplicando las propiedades de las raíces.

a. $\sqrt{180}$ **b.** $\sqrt{\frac{128}{25}}$ **c.** $\sqrt[4]{40000}$ **d.** $\sqrt[3]{\frac{648}{8}}$

11. ◆ Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$

b. $\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$

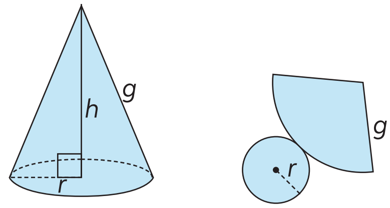
c. $\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{-8} \cdot \sqrt[6]{-2}$

d. $\sqrt[4]{16 + 81} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81}$

12. La altura (h) de un cono mide $3\sqrt{5}$ cm y el radio (r) mide $2\sqrt{3}$ cm.

Recuerda que:

El volumen del cono es $\frac{\pi}{3} hr^2$



$A = \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2 = \pi r \cdot (g + r)$

a. ¿Cuál es el valor de su generatriz (g)?

b. Determina el volumen del cono.

c. Determina el área de la superficie del cono.

Actividades de profundización

13. ◆ Analiza la siguiente demostración. Luego, realiza las actividades.

"Si a es negativo, no existe b real, tal que $b = \sqrt{a}$". Para demostrarlo se asume lo contrario, es decir, que sí existe b que cumple la condición. Entonces, se tiene que:

$$\sqrt{a} = b, \text{ entonces } a = b^2 = b \cdot b$$

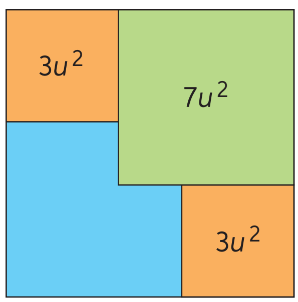
Si b fuera positivo, entonces b^2 también lo sería, por lo que no podría tener un valor negativo. Por lo tanto, no puede ser positivo y se llega a una contradicción.

a. ¿Qué ocurre con b^2 para el caso de b negativo? ¿Es una contradicción? Justifica.

b. ¿Cómo utilizarías la propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ y la demostración anterior para justificar que "las raíces pares negativas no son reales"?

Geometría

14. ◆ La figura es un cuadrado en cuyo interior se dibujaron otros tres cuadrados. Las áreas se muestran en u^2.



a. Determina la medida del lado de los cuadrados verde y naranja.

b. Determina el área total del cuadrado.

c. Determina el área de la figura azul.

Para concluir

a. ¿Cómo puedes verificar si la raíz enésima de un número está bien calculada? Explica.

b. ¿Cuándo la enésima raíz de un número no representa un número real y por qué? Da dos ejemplos y explícalos.

12 y 13

Raíces enésimas y potencias de exponente racional

¿Qué características tiene un número racional?
¿Qué propiedades tienen las potencias? Elabora un listado.

Objetivo: Establecer la relación entre una raíz enésima y una potencia de exponente racional.

1. En parejas, calculen las siguientes raíces. Utiliza calculadora.

$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[9]{8}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt[4]{2401}$
$\sqrt[6]{4}$	$\sqrt[12]{16}$	$\sqrt[3]{343}$	$\sqrt[5]{16807}$

a. ◆ ¿Qué expresiones tienen el mismo resultado? Escríbanlas como una igualdad.

b. Escriban las cantidades subradicales de las raíces como factores primos.

c. ◆ ¿Qué relación existe entre los exponentes de los factores primos y los índices de las raíces con el mismo resultado?

Se puede relacionar la raíz enésima con una potencia de exponente racional, como se muestra a continuación:

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ pues, $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^{\frac{2}{2}} = a$
- $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ pues, $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3}\cdot 3} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

En términos generales se cumple que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos: $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$ $\qquad \sqrt{729} = \sqrt{9^3} = 9^{\frac{3}{2}}$

2. Escribe cada potencia como una raíz.

a. $6^{\frac{1}{5}}$	**d.** $\left(\frac{1}{6}\right)^{1,3}$	**g.** $16^{0,4}$	**j.** $3^{\frac{1}{2}}$
b. $24^{\frac{5}{9}}$	**e.** $101^{\frac{3}{n}}$	**h.** $3^{-2,5}$	**k.** $x^{\frac{1}{5}}$
c. $5^{\frac{5}{2}}$	**f.** $(-4)^{\frac{4}{5}}$	**i.** $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{2}{5}}$	**l.** $x^{\frac{5}{3}}$

3. Escribe cada raíz como una potencia. Simplifica el resultado.

a. $\sqrt{6}$	**d.** $\sqrt[15]{2^{-5}}$	**g.** $\sqrt[9]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$	**j.** $\sqrt[3]{x^2}$
b. $\sqrt[4]{3^6}$	**e.** $\sqrt[n]{(-5)^3}$	**h.** $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{125}\right)^6}$	**k.** $\sqrt{a^3}$
c. $\sqrt[5]{9^6}$	**f.** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$	**i.** $\sqrt[5]{(-3)^2}$	**l.** $\sqrt[5]{a^3}$

4. ◆ Analiza las siguientes igualdades e identifica el error. Luego, corrígelo.

a. $(\sqrt{15})^3 = 15^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ **b.** $-\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = (-9)^{\frac{2}{3}}$

5. Analiza la siguiente actividad resuelta. Luego, explícale a un compañero el procedimiento que se realizó.

$$2^{\frac{3}{2}} - 27^{\frac{1}{2}} + 192^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{4}{3}}$$
$$= \sqrt{2^3} - \sqrt{27} + \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{3^4}$$
$$= \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt[3]{64 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$$
$$= 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} - 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$
$$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3}$$
$$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}$$

Para multiplicar potencias de exponente racional se aplican las siguientes propiedades:

- Con igual base

$$x^{\frac{a}{b}} \cdot x^{\frac{c}{d}} = x^{\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)}$$

Ejemplo:

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

- Con igual exponente

$$x^{\frac{a}{b}} \cdot y^{\frac{a}{b}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$(16)^{\frac{1}{4}} \cdot (4)^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 4)^{\frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = 2\sqrt[4]{2^2}$$

6. Resuelve las siguientes multiplicaciones y expresa el resultado en raíz.

a. $\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $0{,}2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

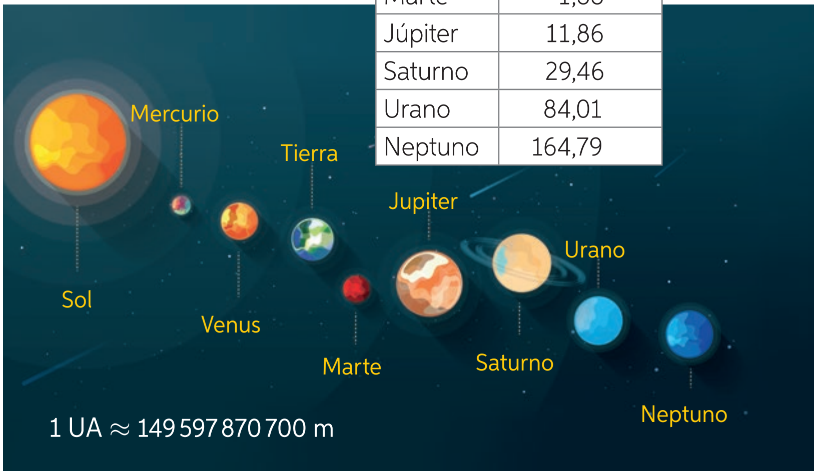
Astronomía

7. Analiza la situación y responde.

La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de traslación de un planeta T, en años, con la distancia media d entre el planeta y el Sol, medida en unidades astronómicas (UA). La expresión que la resume es la siguiente:

$$T = \sqrt{d^3}$$

Planeta	Distancia (UA)
Mercurio	0,39
Venus	0,95
Tierra	1,00
Marte	1,88
Júpiter	11,86
Saturno	29,46
Urano	84,01
Neptuno	164,79



a. Escribe la tercera ley de Kepler utilizando solo potencias naturales.

b. Utilizando calculadora, determina el periodo de traslación de los planetas.

c. ◆ ¿Qué expresión algebraica describe la distancia al Sol de un planeta en función de su periodo de traslación?

d. ◆ ¿Cuál es la distancia al Sol de un planeta cuyo periodo de traslación es de 27 años?

Para concluir

a. Si el área de un cuadrado es $7\sqrt{6}$ cm^2, ¿cuánto mide su lado?

b. ◆ ¿En qué casos el producto de raíces da como resultado un número entero?

14 y 15

Racionalización

¿En qué consiste amplificar una fracción? Da un ejemplo.
Al amplificar una fracción, ¿cambia su valor? Explica.

Objetivo: Estudiar y analizar el proceso de racionalización de una fracción.

1. Considera los siguientes números:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{0,5} \quad 2^{\frac{3}{2}} \quad 2^{-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{2} \quad 2^{\frac{6}{4}} \quad 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

a. Construye una recta numérica y ubica los números anteriores. Ayúdate con una calculadora o aplicación para calcular sus valores.

b. ◆ ¿Qué números tienen la misma ubicación?

c. ◆ En parejas, transformen las raíces anteriores a potencias racionales de base 2.

¿Qué igualdades te parecieron evidentes?, ¿cuáles no? ¿A qué se debe?

Racionalizar una expresión fraccionaria significa encontrar otra expresión que sea equivalente a ella, pero que no contenga raíces en el denominador.

Por ejemplo, para raíces cuadradas:

Amplificamos la fracción por una expresión equivalente a "1".

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Simplificamos.

¿Por qué no se multiplica solo por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para racionalizar la expresión anterior?

2. Racionaliza la expresión $\frac{3}{\sqrt{5}}$ y responde. Puedes guiarte por el ejemplo anterior.

a. Respondan en parejas: ¿Por cuál factor se puede amplificar la fracción?

b. ¿Qué propiedad de las raíces justifica el último paso?

c. De forma individual, encuentra una expresión equivalente a $\frac{3}{\sqrt{5}}$ sin raíces en el denominador.

3. Reúnanse en parejas y racionalicen las siguientes expresiones:

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt{32}} = \frac{3}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b. $\frac{7}{\sqrt{7}}$

c. $\frac{3}{2\sqrt{8}}$

d. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{21}}$

e. $\frac{11}{6\sqrt{3}}$

f. $-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}$

g. $\frac{10}{\sqrt{(a+3)}}$

h. $\frac{13}{\sqrt{(13-a)}}$

¿Qué condiciones debe satisfacer *a* para que la raíz esté bien definida en cada expresión de los ejercicios g y h?

4. Analiza el siguiente procedimiento para racionalizar $\frac{4}{3+\sqrt{10}}$ y responde.

$$\frac{4}{3+\sqrt{10}} = \frac{4}{3+\sqrt{10}} \cdot \frac{(3-\sqrt{10})}{(3-\sqrt{10})} = \frac{4(3-\sqrt{10})}{(3+\sqrt{10})(3-\sqrt{10})}$$

a. ¿Qué relación existe entre el denominador de la fracción y el factor por el cual se amplifica?

b. ¿Qué producto notable resulta en el denominador de la fracción?

c. Desarrolla la operación anterior y completa el procedimiento.

d. ◆ Utiliza el mismo razonamiento para racionalizar la expresión $\frac{4}{3-\sqrt{10}}$. ¿Qué tienen en común ambos procedimientos?

Para racionalizar las expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ y $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, con a y b números reales mayores a 0 y distintos, realizaremos el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Dicho de otra forma, si el denominador de la fracción es un binomio con raíces, se amplifica por el factor faltante de la **suma por su diferencia** para racionalizarla.

¿Por qué en ambos casos el denominador resultante es $a - b$?

5. Racionaliza las siguientes expresiones:

Por ejemplo: $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Aplicamos la suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$, donde $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ corresponde al factor $(a + b)$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

a. $\frac{10}{2+\sqrt{8}}$

b. $\frac{9}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

c. $\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}$

d. $\frac{32}{21-\sqrt{13}}$

e. $\frac{1}{7-\sqrt{6}}$

f. $\frac{2}{2+2\sqrt{2}}$

g. $-\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{5}}$

h. $-\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{12}}$

i. $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

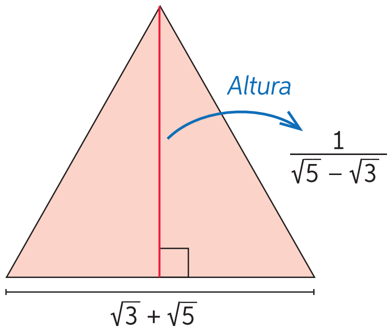
j. $\frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$

k. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{3b}}$

l. $\frac{2a}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

6. ◆ ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que las raíces estén bien definidas en los ejercicios k y l?

7. Determina el área del triángulo. Racionaliza el resultado.



8. Racionaliza y luego evalúa la expresión obtenida para $a = 5$, $b = 2$ y $c = 6$ en cada caso.

Por ejemplo: $\frac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$

Paso 1: Racionalizamos.

$$\frac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}} = \frac{c \cdot (\sqrt{c}-\sqrt{b})}{c-b}$$

Paso 2: Evaluamos y simplificamos.

$$\frac{6 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}-\sqrt{2})}{2} = \frac{3\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{2}$$

a. $\frac{c}{\sqrt{a}}$

b. $\frac{b}{\sqrt[3]{a}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$

d. $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

e. $\frac{b}{b+\sqrt{b}}$

f. $\frac{a}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}$

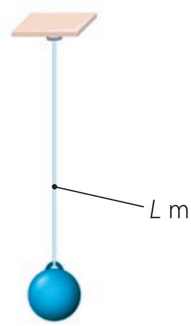
Actividades de profundización

Física

9. El tiempo T que tarda un péndulo simple de largo L en realizar una oscilación completa está determinado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración de gravedad.

a. Racionaliza la expresión para calcular el período de un péndulo simple.

b. ¿Cuál es el período de un péndulo de largo 0,5 m? Considera $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



Para concluir

a. ¿Qué aspectos debes considerar al racionalizar una fracción? Explica.

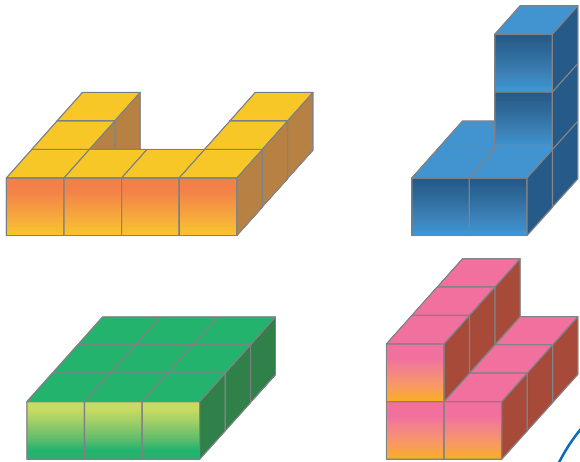
b. ◆ ¿Cómo se puede verificar que la expresión racionalizada es equivalente a la original? Comenta y aplícalo en un ejercicio.

16 y 17

La ley cuadrado-cúbica

1. En grupos de 3 o 4 personas, utilicen los materiales en la siguiente actividad.

PASO 1: Utilizando los cubos, construyan un cuerpo sencillo como los de los ejemplos.



Materiales:
- Regla.
- Cubos, que deben ser siempre del mismo tamaño entre sí:
  - Dados de 6 caras.
  - Cubos Rubik.
  - Cubitos de madera.

Recuerda que en una figura 3D la arista es el lado común a dos caras.

PASO 2: Midan con la regla y anoten el valor de la arista de uno de los cubos utilizados. Luego, calculen la superficie y el volumen total del cuerpo original que construyan.

PASO 3: Dupliquen, tripliquen y cuadripliquen (si es posible) el cuerpo original. Repitan las mediciones y registros del paso 2.

a. Comprueben si en sus figuras se replica la siguiente relación:

> Si tienes un cubo de 1 cm de arista su área será $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$ cm^2, mientras que su volumen será $1^3 = 1$ cm^3. Si duplicas sus aristas, su área pasará a ser $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ cm^2, mientras que su volumen aumentará a $2^3 = 8$ cm^3. Es decir, aumentó 4 veces su superficie y 8 veces su volumen.

b. Plantea la razón entre los lados de los cuerpos anteriores. Plantea, además la razón entre sus áreas y la razón entre sus volúmenes.

c. ◆ ¿Cómo se relacionan las razones anteriores? Plantea una expresión algebraica.

d. ◆ Dos cuerpos tienen sus áreas en la razón $\frac{9}{5}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.

e. ◆ Dos cuerpos tienen sus volúmenes en la razón $\frac{8}{27}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.

Reflexiono

a. Para los antiguos griegos fue imposible hallar el valor del lado de un cubo que duplique el volumen del otro. ¿A qué crees que se debió su problema?

b. ¿Necesariamente esta actividad se debe hacer con cubos? ¿Qué otras figuras utilizarías y por qué?

18 y 19

Lección **3**

Logaritmos

Definición de logaritmos

¿A qué número es necesario elevar 2 para obtener $\sqrt{2}$?
¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema anterior?

Objetivo: Identificar los logaritmos y su relación con las potencias.

1. En parejas, observen las relaciones descritas por los siguientes jóvenes referidas a la expresión $4^5 = 1024$.

a. En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$2^8 = 256$ $\quad$ $3^6 = 729$ $\quad$ $5^4 = 625$

b. Completen la tabla siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	*8*	*3*	*$\log_8(512) = 3$*
$10^4 = 10000$			
	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

2. Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.

a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?

b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?

c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

Se llama **logaritmo de base b de a** al número *c* al cual debe elevarse la base *b* para obtener *a*. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c \qquad \text{Con } a, b \in \mathbb{R}^+,\ b \neq 1 \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo: $5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

Para relacionar una potencia, un logaritmo y una raíz enésima, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

b se denomina base del logaritmo y a se denomina argumento.

Si b = 10, se habla de logaritmo decimal o común y en lugar de "$\log_{10}$" se escribe simplemente "log".

1. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$

b. $0{,}3^2 = 0{,}09$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

d. $9^{\frac{1}{2}} = 3$

e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

f. $0{,}01^{-2} = 10000$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

2. Determina en cada caso el valor de a.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \longrightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

b. $\log_a 8 = 3$

c. $\log_a 5 = -2$

d. $\log_5 0{,}04 = a$

e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$

f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$

g. $\log_9 a = 4$

h. $\log_7 a = 3$

i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

3. Lee la siguiente información y responde utilizando tu calculadora.

> En una calculadora científica, el botón “log” por defecto tiene una base 10. Para calcular un logaritmo debes seguir la secuencia:
>
> “Log”, “cantidad” y “=”

a. Calcula los siguientes logaritmos utilizando tu calculadora.

- log 1000
- log 100
- log 10
- log 0,1
- log 1
- log 2
- log 0,2
- log 20
- log 200

b. ◆ Comprueba los resultados anteriores utilizando la definición de logaritmos.

c. ◆ ¿Cuál(es) de los resultados tiene(n) una diferencia aproximada de 0,301?

d. ◆ Ingresa en la calculadora “log”, “–10” y “=”. ¿Cómo explicas lo ocurrido?

4. ◆ Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5 25 = 2$

b. $\log_2 0{,}25 = 0{,}5$

c. $\log_9 -3 = 2$

d. $\log_1 3{,}78 = 0$

e. $\log_2 10 = 100$

f. $\log_{10} 0 = 1$

g. $\log_4 0{,}25 = -2$

h. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

i. $\log 10^5 = 5$

j. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

k. $\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{3}{2}$

l. $\log_2 \sqrt[3]{64} = 2$

Para concluir

a. ¿Cuál es la relación entre la expresión $\log_b a$ y una potencia? ¿y con una raíz?

b. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa? ¿por qué?

20 a 21

Propiedades de los logaritmos

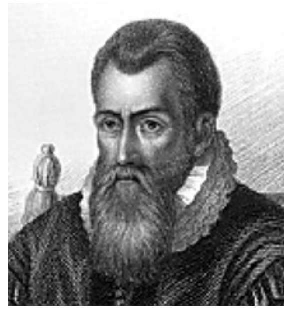
¿Cómo se expresa como potencia $\log_b a = c$?

¿Cuál crees que fue el problema que dio origen a los logaritmos?

Objetivo: Comprender y verificar las propiedades de los logaritmos.

Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$



John Napier
(1550 - 1617)
Fue un matemático, físico y astrónomo escocés que introdujo el concepto de logaritmo a principios del siglo XVII como un medio de simplificación de los cálculos

1. ◆ Utilizando las propiedades anteriores responde:

a. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a.

b. Demuestra las propiedades anteriores planteándolas como potencias. Utiliza, para ello, la definición de logaritmo.

◆ ¿Qué propiedades de potencias utilizaste para realizar la actividad anterior? Identifícalas y coméntalas con tu curso.

2. ◆ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades:

Si $\log_b a = c$, entonces $b^c = a$

PASO 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \longrightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

PASO 2: Utilizando la definición de logaritmo: $\log_b(a^n) = n \cdot c$

PASO 3: Reemplazamos c por $\log_b a$: $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a$

a. ¿Qué propiedades de potencias se utilizaron? Nómbralas.

b. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a y n.

Sean b y x números reales positivos con $b \neq 1$ y n un número real, se cumple la propiedad de **logaritmo de una potencia de la base**:

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

3. ◆ Utilizando la propiedad anterior, comprueba las siguientes proposiciones.

a. $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{\log_b a}{n}$

b. $\log_b\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log_b a$

4. Calcula el valor de los siguientes logaritmos aplicando las propiedades vistas.

a. $\log_3 \sqrt[5]{81}$

b. $\log_5 \dfrac{1}{625}$

c. $\log_7 49^{21}$

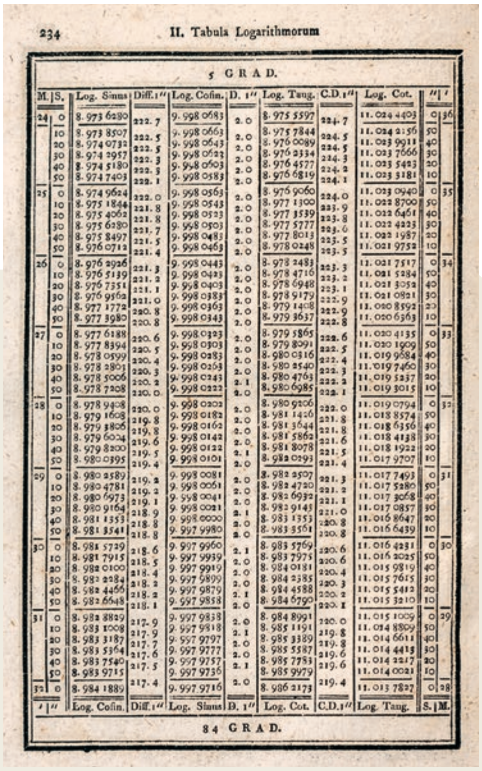
d. $\log_7 \sqrt{7}$

e. $\log_3 27^{10}$

f. $\log_4 \sqrt[8]{64}$

5. Calcula el valor de los logaritmos utilizando el siguiente razonamiento.

En los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, se presentaban operaciones como 65 536 · 16 384. Como se puede ver, los factores eran bastante grandes, lo que podía conducir a múltiples errores. Entonces, John Napier inventó “números artificiales” (logaritmos) que utilizaba para simplificar las operaciones de la siguiente forma:



Vega, G. (1797).
Tablas logarítmicas-trigonométricas
(2. verb., verm. und gänzlich umgearb. Aufl. ed.).
Leipzig: Weidmannische Buchhandlung.

Paso 1: Transformaba ambos números a una potencia de base común:

$4^8 = 65536$ $\qquad$ $4^7 = 16384$

Paso 2: Utilizando sus “números artificiales”, transformaba la multiplicación en suma:

$$\log_4(65536 \cdot 16384) = \log_4(65536) + \log_4(16384)$$
$$= \log_4 4^8 + \log_4 4^7$$
$$= 8 + 7$$
$$= 15$$

Paso 3: Así, en vez de calcular 65 536 · 16 384, obtenía el mismo resultado mediante la potencia de 4^{15}, el cual se buscaba en las tablas de potencias que había construido.

a. $\log_6(6 \cdot 36)$ **d.** $\log_6(1296 \cdot 36)$ **g.** $\log_{11}(11 \cdot 1331)$

b. $\log_4(16 \cdot 256)$ **e.** $\log_4(256 \cdot 4)$ **h.** $\log_8(64 \cdot 32768)$

c. $\log_3(9 \cdot 81)$ **f.** $\log_5(25 \cdot 3125)$ **i.** $\log_5(5 \cdot 390625)$

Sean b, x e y números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

6. En parejas, utilice cada uno un método de cálculo distinto para determinar los valores de los siguientes logaritmos. Una persona utilizará las propiedades anteriores de logaritmo y la otra seguirá el razonamiento de Napier. Luego, revisen su desarrollo y comparen sus resultados.

a. $\log_6(216:36)$ **c.** $\log_2(32:8)$ **e.** $\log_6(7776 : 216)$

b. $\log_4(256:4)$ **d.** $\log_3(729:27)$ **f.** $\log_8(262\,144 : 512)$

◆ ¿Facilitó el trabajo en parejas el desarrollo de la actividad anterior? ¿Por qué?

7. Analiza la siguiente demostración:

Al calcular el producto y el cociente entre x e y representando como potencias los logaritmos:

$\log_b(x) = m \longrightarrow b^m = x$ $\qquad$ $\log_b(y) = n \longrightarrow b^n = y$

Se tiene que:

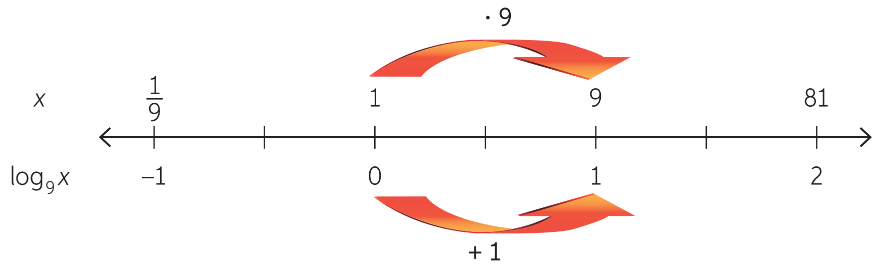
$x \cdot y = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ $\qquad$ $x : y = b^m : b^n = b^{m-n}$

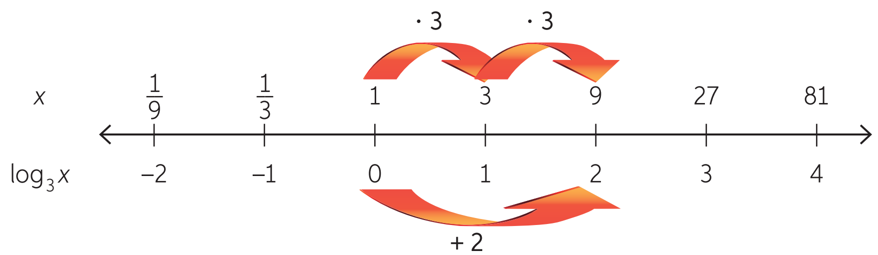
$\longrightarrow \log_b(x \cdot y) = m + n = \log_b(x) + \log_b(y)$ $\qquad$ $\longrightarrow \log_b(x : y) = m - n = \log_b(x) - \log_b(y)$

a. ¿Qué propiedades de las potencias se utilizaron? Identifícalas.

b. ◆ ¿Cómo puedes utilizar las propiedades $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b a$ y $\log_b(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ para demostrar $\log_b(x : y) = \log_a x - \log_a y$?

8. Analiza:





a. ¿Qué relación observas entre ambas escalas?

b. ¿Cómo explicarías que $\log_3 9 = 2 \cdot \log_9 9$ utilizando las escalas anteriores?

c. Construye una escala logarítmica de $\log_{\sqrt{3}} x$ y $\log_{81} x$. ¿Cuál es la equivalencia en ambas escalas para $\log_9 9$? ¿Cómo se relaciona con el cambio de base logarítmica?

d. Se quiere modificar $\log_3(10)$ a un logaritmo de base 9. ¿Por cuánto se debe multiplicar $\log_9(10)$?

e. ¿Cuál debe ser el valor de n en $\log_4(16) = n \cdot \log_8(16)$? ¿Cómo se relaciona con que $4^n = 8$?

Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un **cambio de base** para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

9. ◆ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

Sea $\log_b(a) = c \longrightarrow b^c = a$

Paso 1: $b^c = a \Rightarrow \log_p(b^c) = \log_p(a)$

Paso 2: $c \cdot \log_p(b) = \log_p(a)$

Paso 3: $c = \dfrac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Paso 4: $\log_b(a) = \dfrac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Ejemplo de cambio de base:

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3}$$

Recuerda que la tecla "log" se encuentra en base 10.

a. Describe en cada paso los procedimientos realizados.

b. Comprueba si las siguientes proposiciones son correctas. Utiliza una calculadora y el teorema del cambio de base.

- $\log_2 10 \approx 3,322$
- $\log_8 2 = 0,\overline{3}$
- $\log_5 3 \approx 0,683$

10. Calcula el valor de los siguientes logaritmos aplicando las propiedades vistas.

Ejemplo: $\log_5 \sqrt[5]{625} = \frac{1}{5}\log_5 625 = \frac{1}{5}\log_5 5^4 = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

a. $\log_2 \dfrac{1}{8}$

b. $\log_3 \sqrt{\dfrac{1}{81}}$

c. $\log_7 \sqrt[4]{7^3}$

d. $\log_2 \dfrac{32}{1024}$

e. $\log_{\sqrt{3}} 81$

f. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{64}{27}$

g. $\log\left(\dfrac{10^{11} \cdot 10^5}{10^7}\right)^2$

h. $\log\left(\dfrac{100^4}{0,001}\right)^3$

i. $\log_{11} \sqrt[3]{\dfrac{1}{121^5}}$

Actividades de profundización

11. Expresa cada logaritmo en términos de m y n, con $m = \log 2$ y $n = \log 3$. Guíate por el ejemplo.

$$\log_5 24 = \frac{\log 24}{\log 5} = \frac{\log(8 \cdot 3)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log(2^3 \cdot 3)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 2^3 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{3\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{3m + n}{1 - m}$$

a. $\log_2 3$

b. $\log_3 2$

c. $\log 30$

d. $\log_4 \sqrt{12}$

e. $\log_{15} 27$

f. $\log 0,2$

12. ◆ Utilizando propiedades, escribe dos expresiones logarítmicas de base distinta a 6 equivalentes al número 6. Guíate por el ejemplo.

$$6 = 6\log_3 3 = \log_3 729 = \log_3 \frac{2916}{4} = \log_3 2916 - \log_3 4$$

Para concluir

a. ◆ ¿Se puede escribir un logaritmo en cualquier base real? Justifica.

b. ◆ ¿Qué utilidad tiene el cambio de base para utilizar la calculadora?

22 a 24

Aplicaciones de los logaritmos

Si deseas determinar el valor de x en la ecuación: $3^x = 2$, ¿ocuparías una raíz enésima o un logaritmo? ¿Por qué?

¿Qué diferencia una escala logarítmica de una recta numérica? Justifica.

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana y otras asignaturas mediante logaritmos.

En una expresión algebraica de la forma $a^b = c$ se pueden calcular cada una de sus cantidades si se conocen las otras dos. Esto se realiza mediante tres operaciones distintas:

- Si se desconoce c, se utilizan **potencias** para encontrar su valor.
  Ej: Si $a = 5$ y $b = 3$, entonces $c = 5^3 = 125$.
- Si se desconoce a, se utilizan **raíces** para encontrar su valor.
  Ej: Si $b = 4$ y $c = 81$, entonces $a^4 = 81 \longrightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$.
- Si se desconoce b, se utilizan **logaritmos** para encontrar su valor.
  Ej: Si $a = 7$ y $c = 2401$, entonces $7^b = 2401 \longrightarrow b = \log_7 2401 = 4$.

Sonido

1. La intensidad del sonido puede ser medida de dos formas distintas:

- **Intensidad sonora (β)**: se mide en decibeles (dB).
- **Intensidad acústica (*I*)**: corresponde a la cantidad de energía transportada por una onda sonora aplicada en una superficie. Se mide en watts sobre metro cuadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$.

Estas se relacionan mediante la expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log(I) + 120$$

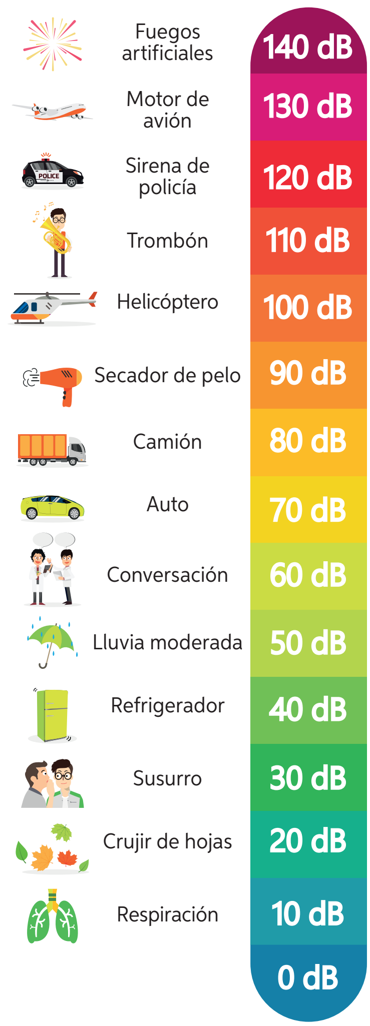
a. El umbral del dolor es $1\frac{W}{m^2}$ para el ser humano. ¿Cuál es la equivalencia en decibeles? ¿Qué situaciones de la imagen resultan doloras para el oído humano?

b. ¿Qué expresión algebraica se utiliza para calcular la intensidad acústica (*I*) dada la intensidad sonora (β)?

c. Utiliza la expresión anterior para determinar la intensidad acústica de 3 sonidos distintos.

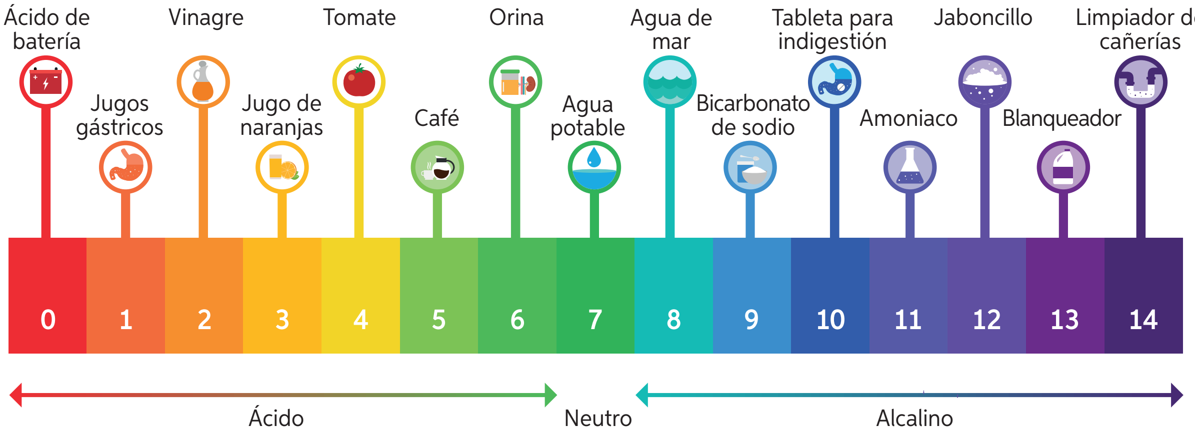
d. ◆ Se sabe que la intensidad de un equipo duplica la de otro equipo. ¿Cuál es la diferencia que poseen en decibeles?

◆ ¿Por qué es importante no exponerse a sonidos de alta intensidad? Comenta.



Química

2. Para medir la acidez o alcalinidad de una sustancia se utiliza el *pH*. Este asocia la concentración de moles de hidrógeno $[H^+]$ en la sustancia (en moles por litro) según la fórmula: $pH = -\log[\mathrm{H}^+]$



a. Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.

b. La escala de pH varía entre 0 y 14. ¿Cuáles son las concentraciones de moles de hidrógeno máximas y mínimas de la escala?

c. Calcula la concentración de moles de hidrógeno aproximada de 3 sustancias distintas.

d. ◆ ¿Qué expresión algebraica utilizaste para calcular las concentraciones anteriores? ¿Cómo se relaciona con la fórmula para calcular el pH?

Biología

3. La relación entre el área de la superficie corporal *a* de una persona en m^2, su masa *m* en kg y su altura *h* en cm está dada por la expresión:

$$\log(a) = -2{,}144 + 0{,}425\log(m) + 0{,}725\log(h)$$

a. ¿Cuál es el área aproximada de una persona si su masa es 70 kg y su altura, 1,75 m?

b. Determina la estatura aproximada de una persona si el área de su cuerpo es 2 m^2 y su masa, 80 kg.

c. ◆ Utilizando propiedades de logaritmos, encuentra una expresión equivalente a la fórmula anterior. Compruébala utilizando los resultados anteriores.

4. La temperatura final de un cuerpo T_f transcurridos *t* minutos está dada por su temperatura inicial T_i, la temperatura ambiental T_a y la constante *a* de la forma:

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) \cdot a^t$$

Considera un pan recién horneado a 180 °C, en un día con 20 °C ambientales.

a. ¿Cuál es la ecuación que rige el enfriamiento si *a* = 0,85?

b. ¿Luego de cuántos minutos se encuentra bajo los 34°C?

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

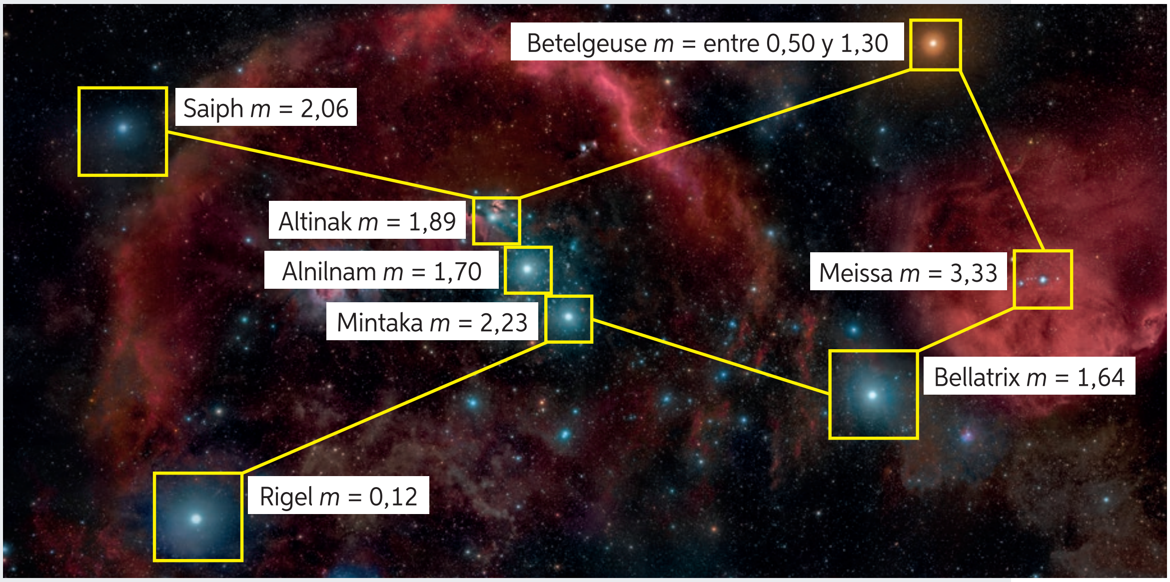
La escala de magnitudes aparentes (m) clasifica a las estrellas según la intensidad de su brillo estandarizado (I). Se calcula mediante la expresión:

$$m = \log_{100}\left(\frac{1}{(I)^5}\right)$$

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP036A

Las estrellas que se ven más brillantes son aquellas que tienen menor valor.

Las magnitudes aparentes de las estrellas principales de la constelación de Orión son:



a. ¿Cuál es la estrella de la constelación de Orión que se ve más brillante en el cielo nocturno? ¿Cuál es la menos brillante?

b. Simplifica y transforma la expresión utilizando propiedades para obtener una equivalente con logaritmo de base 10.

c. La estrella Ácrux de la constelación de la Cruz del Sur tiene una intensidad de brillo estandarizada de 0,5. ¿Cuál es la magnitud aparente de Ácrux? ¿Es más o menos brillante que Rigel?, ¿por qué?

d. Determina la intensidad del brillo de las estrellas de Orión.

e. ¿Cuánto varía la intensidad del brillo de Betelgeuse?

f. La escala moderna incluye cuerpos celestes como la Luna y el Sol con una magnitud aparente de –12,6 y –26,8 respectivamente. ¿Cuántas veces más intenso es el brillo del Sol que el de la Luna?

Para concluir

a. ¿En qué otras situaciones cotidianas podrías aplicar logaritmos? Investiga.

b. ¿Es correcto decir que $\log(a) + \log(b) = \log(a + b)$? Argumenta tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.

25 a 27

Antes de continuar

1. Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y raíces.

2. Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y logaritmos.

3. Expresa cada potencia en forma de logaritmo.

a. $3^4 = 81$

b. $2^{-6} = \frac{1}{64}$

c. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

d. $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$

e. $\left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$

f. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-4} = \frac{256}{625}$

4. Expresa como potencias los siguientes logaritmos.

a. $\log_8 512 = 3$

b. $\log_7 \frac{1}{343} = -3$

c. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = -4$

d. $\log_{\frac{5}{6}} \frac{25}{36} = 2$

5. Calcula el valor de x en cada caso para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $\log_x 729 = 6$

b. $\log_x 4096 = 4$

c. $\log_x 4 = \frac{1}{2}$

d. $\log_5 x = 6$

e. $\log_{64} x = \frac{1}{4}$

f. $\log_{\frac{512}{216}} x = \frac{1}{3}$

g. $\log_{81} 3 = x$

h. $\log_{\frac{1}{81}} 3 = x$

i. $\log_{\frac{1}{625}} 5 = x$

6. Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades de logaritmos.

a. $2\log_4 64 + \frac{1}{3}\log_3 27 - \sqrt{\log_5 125}$

b. $4\log_3 9 + \frac{1}{3}\log_{16} 8 - \sqrt{\log_2 32}$

c. $\frac{1}{3}\log 10 + \frac{2}{3}\log 10 - \log 10 + \sqrt{\log 10}$

d. $\dfrac{\sqrt{3\log 100}}{9 + \log_2 8} : \dfrac{\log_6 3 + \log_6 2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$

7. Para calcular el pH de una solución química se utiliza la fórmula $pH = -\log[H^+]$. En ella, H^+ es la concentración de iones de hidrógeno presentes en la solución. ¿Cuál es el pH de una solución que tiene una concentración de $[H^+]$ igual a $9,5 \cdot 10^{-12}$?

8. Para determinar el diámetro d de un asteroide (en km), los astrónomos utilizan la expresión $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$. En ella, g corresponde su magnitud absoluta.

a. Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.

b. Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20.

c. ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 km?

Reflexiono

a. ¿Cuál crees que es la utilidad de las escalas logarítmicas en contextos científicos?

b. ¿Cómo facilitaron tus cálculos las distintas propiedades de logaritmos?

c. ¿Comprendiste completamente la relación entre las propiedades de logaritmos y las de potencias enésimas? ¿Qué podrías mejorar?

28 a 29

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Responde a partir de la imagen.

1. ¿Cómo justificas la aparente contradicción presentada en la imagen?

2. Dibuja un cuadrado de lado 2 cm. Luego, responde las siguientes preguntas:

a. ¿A qué conjunto pertenece el valor de la diagonal de este cuadrado?

b. ¿Cuál es el largo aproximado de su diagonal? Estima mediante cuadrados perfectos.

3. Repite la experiencia para un cuadrado de lado 4, 8 y 10 cm. En caso de que se repitan los tipos de resultados, explica por qué ocurre eso.

Resuelve.

4. Indica si los siguientes números son racionales o irracionales. En caso de ser racionales, escríbelos como una fracción.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{4}$

b. $\sqrt[3]{25 + \sqrt{4}}$

c. $\sqrt[3]{-5}$

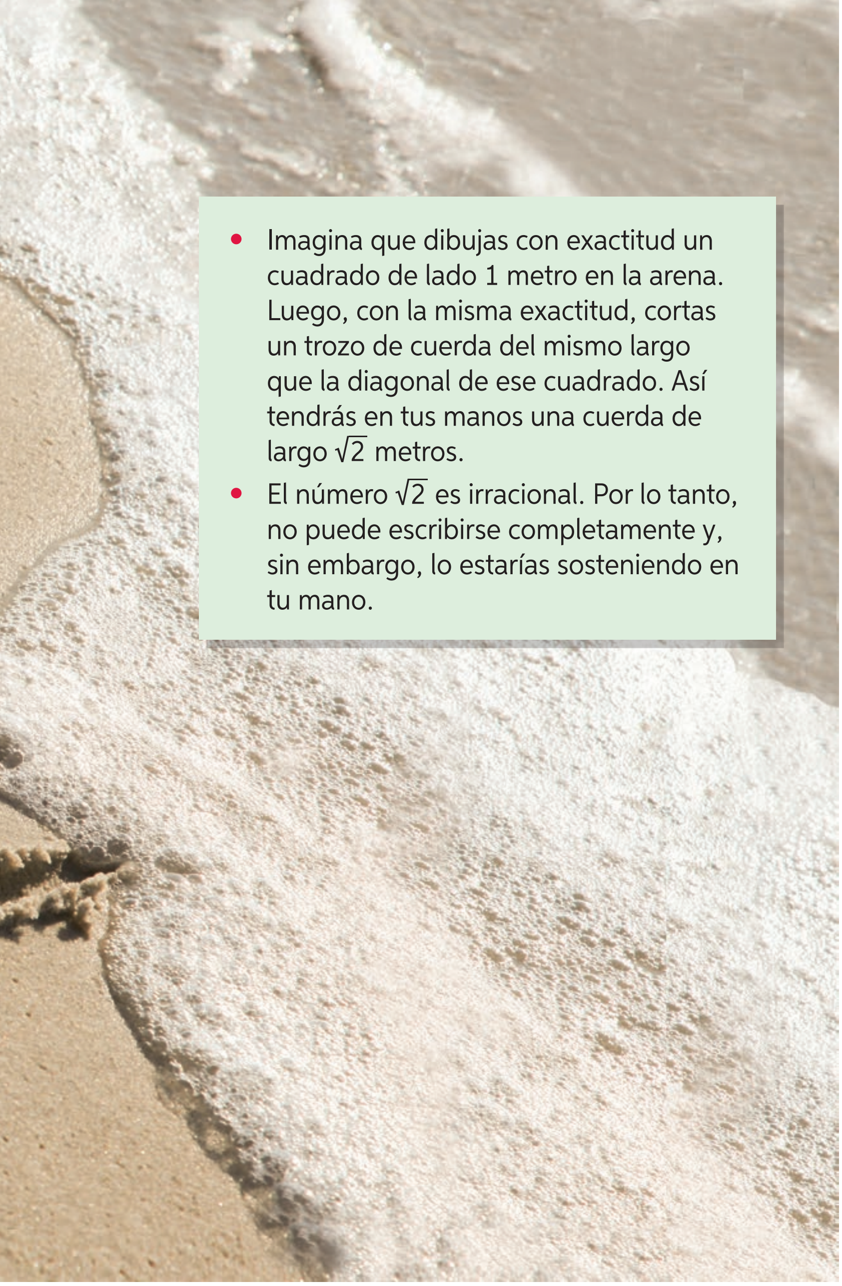
d. $\sqrt{\frac{162}{49}}$

5. Construye en tu cuaderno una recta numérica y ubica los siguientes números en ella.

a. $\sqrt{17}$

b. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

6. Aproxima por redondeo a la centésima el valor de $\sqrt{30}$. Luego, determina el error de aproximación.



- Imagina que dibujas con exactitud un cuadrado de lado 1 metro en la arena. Luego, con la misma exactitud, cortas un trozo de cuerda del mismo largo que la diagonal de ese cuadrado. Así tendrás en tus manos una cuerda de largo $\sqrt{2}$ metros.
- El número $\sqrt{2}$ es irracional. Por lo tanto, no puede escribirse completamente y, sin embargo, lo estarías sosteniendo en tu mano.

7. Reduce las siguientes expresiones utilizando descomposiciones y propiedades de raíces y racionales.

a. $\dfrac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b. $\left(\sqrt{\dfrac{14}{3}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{7}{9}}\right)$

c. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\dfrac{2}{7}}}$

e. $\left(\sqrt[21]{\dfrac{12}{5}}\right)^{14}$

f. $\sqrt{3}+\sqrt{27}-2\sqrt{75}$

8. Determina la veracidad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

a. La base de un logaritmo puede ser cualquier número real positivo.

b. $\log_{-5} 625$ existe y es igual a 4.

c. El logaritmo cuyo argumento es la base de dicho logaritmo es siempre igual a 1.

d. $\log_{0,5} 8 = -3$ expresado en forma de potencia es $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} = 8$

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones (Considera $\log(2) = 0,3$, $\log(3) = 0,47$, $\log(5) = 0,7$ y $\log(7) = 0,85$)

a. $-\log(14) - 5\log(21) + \log(18)$

b. $3\log(4) + \log(245) - \log(144)$

10. Resuelve los siguientes problemas:

a. El patio de un colegio, de forma rectangular, tiene 450 m^2 de superficie. ¿Cuánto mide su lado más corto si el patio está formado por dos cuadrados iguales?

b. Calcula el volumen de un recipiente cúbico tal que para llenarlo con leche se gastaron \$159 720. Se sabe que el litro de leche cuesta \$15.

c. $\log(P) = \dfrac{20 + t \cdot \log(2)}{10}$ es la expresión que relaciona la población P de insectos en una bodega transcurridas t horas en que está cerrada.

¿Cuántos insectos había en el instante en que se cerró?

¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que se cuadruplique la población?

Reflexiono

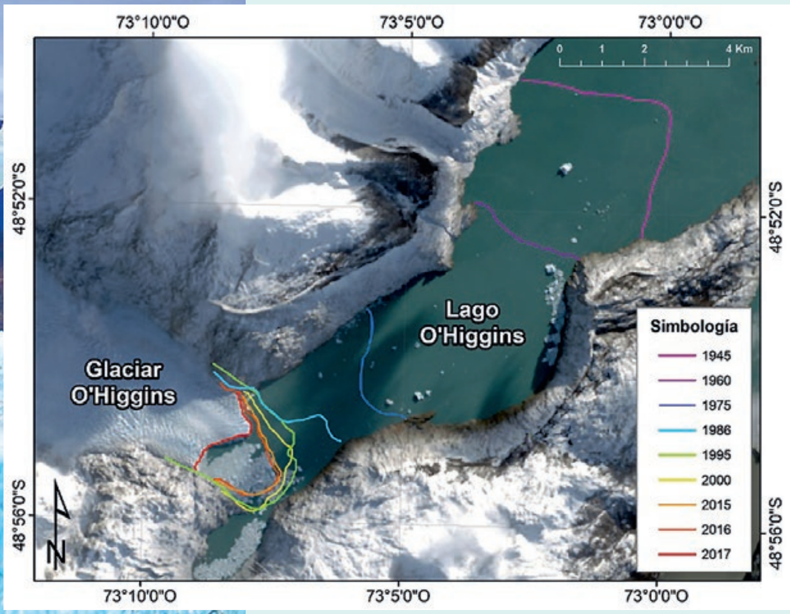
- ¿Qué actividad te costó más realizar? ¿Qué contenidos están implicados?
- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?
- ¿De qué forma te aportaron al desarrollo de la evaluación tus compañeros?

Glaciar Perito Moreno. Santa Cruz, Argentina. Patrimonio de la Humanidad.

Unidad 2 Álgebra y funciones

En esta Unidad aprenderás sobre ecuación y función cuadrática, sus propiedades, representación gráfica y aplicaciones en la vida cotidiana. Además, comprenderás el concepto de función inversa y cambio porcentual.

1. ¿Por qué crees que el glaciar Perito Moreno es el más visitado? Comenta con tu curso.
2. ¿Qué otros efectos tiene el calentamiento global? Investiga y comenta.
3. ¿Es un efecto reversible el cambio climático? ¿Qué podemos hacer para evitar sus efectos?



Frente de glaciar O'Higgins
Fuente: Andrés Rivera, www.glaciologia.cl

Los glaciares son masas de hielo acumuladas durante miles de años. Junto con los casquetes polares, son la mayor reserva de agua fresca en la Tierra. Sin embargo, debido al cambio climático, se han visto reducidos en tamaño. Efectos como precipitaciones, temperatura media y nubosidad afectan directamente a la masa glacial, por lo que su alteración es considerada el indicador más sensible del cambio climático.

El área de Campo de Hielo Sur se estimó en 13 500 km^2 el año 1945. Luego se redujo a 13 000 km^2 en 1986 y a 12 550 km^2 en 2010. Entre 1975–1995 se perdieron 13,5 km^3/año, lo que aumentó a 38,7 km^3/año en 1995–2000.

El más afectado corresponde al glaciar O'Higgins. Este retrocedió 12 km en el periodo 1946–1995. Además, perdió 2 km entre los meses de junio y julio de 2017. El glaciar Perito Moreno es uno de los pocos que se encuentra en equilibrio y es el más visitado de toda la Patagonia.

4. ¿El cambio en los glaciares en la Patagonia puede ser modelado por una función lineal? ¿Por qué?

5. ¿Cuánto debiese avanzar anualmente para recuperarse el glaciar O'Higgins en los próximos 50 años? ¿Crees que sucederá?

Activo lo que sé

1. Calcula:

a. El 30 % de 125.

b. El 80 % de 4960.

c. El 20 % del 50 % del 10 % de 36.

d. ¿Qué porcentaje es 600 de 800?

e. ¿Qué porcentaje es 400 de 600?

f. ¿Qué porcentaje es 200 de 800?

g. El 12 % de un número es 8,4. ¿Cuál es el número?

h. El 2 % de un número es 68. ¿Cuál es el número?

2. Multiplica e identifica el nombre del producto notable.

a. $(x - 5) \cdot (x - 7)$

b. $(x + 10) \cdot (x - 6)$

c. $(x - 6) \cdot (x - 6)$

d. $(x - 11) \cdot (x + 11)$

e. $(4x + 11) \cdot (4x - 2)$

f. $(2x - 5) \cdot (2x + 5)$

g. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

h. $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 4\right)$

3. Resuelve los siguientes problemas:

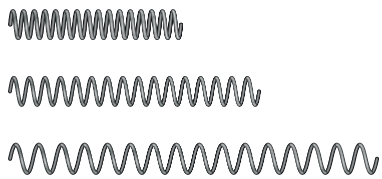
a. En una caja hay 4 docenas de bombones, de los cuales el 25 % está envuelto en papel de aluminio. ¿Cuántos bombones no están envueltos?

b. El perímetro de un rectángulo mide 48 cm. Calcula sus dimensiones sabiendo que el largo es el triple de su ancho.

c. El IVA (impuesto al valor agregado) corresponde al 19 % de todas las compras que se realizan. Si un libro cuesta $9000 sin IVA, ¿cuál será su valor final?

d. El valor mensual, con IVA, de un servicio digital en línea es $9520. ¿Cuál es su valor sin IVA?

4. El estiramiento o compresión de un resorte es directamente proporcional a su fuerza de restitución. Esta relación, conocida como ley de Hooke, está dada por $F = -k\,x$. En esta F es la fuerza de restitución; x, su deformación (estiramiento o compresión) y k es la constante de deformación del resorte. Para el resorte de la imagen, la relación es $F = -100\,x$.



$x = -0{,}6$ cm

$x = 0$ cm

$x = 0{,}4$ cm

a. Calcula la fuerza de restitución del resorte para cada distancia que este se estira o comprime en las imágenes.

b. A partir de los datos obtenidos, traza la gráfica que representa la relación entre la fuerza de restitución y la elongación del resorte.

c. ¿Cómo se modificaría la gráfica si el coeficiente del resorte fuera $k = 50$?

d. ¿Corresponde a una función la relación entre ambas magnitudes? ¿Por qué?

Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas? ¿Crees que debes reforzar algún contenido? Si es así, ¿cuál?
- ¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad? ¿Qué conceptos te resultaron más fáciles de comprender?

Lección 4

Cambio porcentual constante

Definición de cambio porcentual

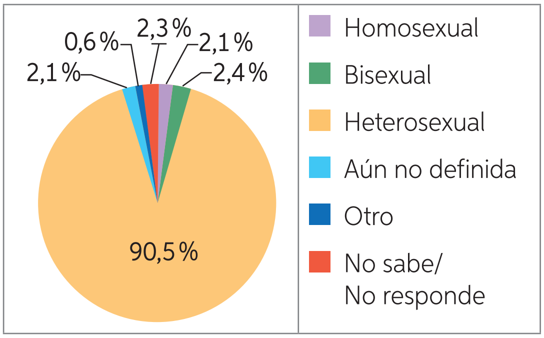
¿Cómo pueden representarse los porcentajes de forma algebraica?
¿Cómo pueden representarse los porcentajes de forma gráfica?

Objetivo: Comprender y analizar el cambio porcentual de una magnitud en el tiempo.

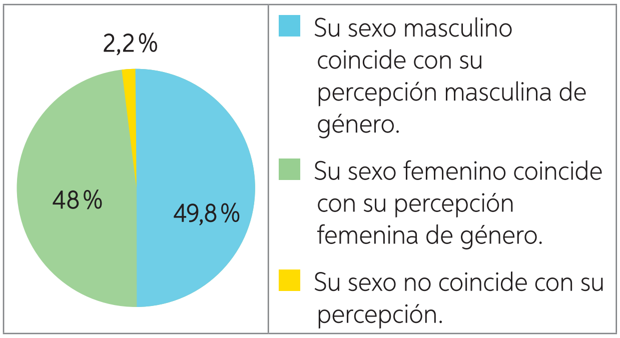
Ciencias sociales

1. La IX Encuesta Nacional de Juventud fue aplicada a 9700 jóvenes entre los 15 y 29 años. Los resultados se presentan a continuación.

Orientación sexual



Identidad



a. ¿A cuántas personas encuestadas corresponde cada una de las categorías de orientación sexual?

b. ¿A cuántas personas encuestadas corresponde cada una de las categorías de identidad?

c. ◆ La VIII Encuesta se aplicó tambíen a 9700 jóvenes. De ellos, 8042 declararon su orientación como heterosexual. ¿En cuánto varió el porcentaje?

¿Por qué crees que es importante realizar este tipo de encuestas? Comparte tu respuesta con tu curso.

El **cambio porcentual** es la variación de un número o cantidad inicial en un periodo de tiempo. El **índice de variación** (Iv) es un número decimal positivo que se define como el cociente entre dos valores consecutivos de una variable. Por ejemplo, el índice de variación entre el periodo actual y el periodo anterior se calcula mediante:

$$Iv = \frac{\textit{Valor actual}}{\textit{Valor anterior}}$$

Indicando el crecimiento o decrecimiento de la variable. Si $0 < Iv < 1$, la variable decrece en el tiempo. Si $1 < Iv$, la variable crece en el tiempo.

◆ ¿Qué ocurre con una variable si el índice de variación es 1? Explica con tus palabras.

2. Analiza el siguiente titular y responde.

El índice de variación del precio de los combustibles entre marzo y abril fue de 1,03.

a. ¿El valor de los combustibles aumentó o disminuyó? ¿En qué porcentaje?

b. En marzo el precio de un litro de combustible era de $780. ¿Cuánto costará en abril?

c. Supongamos que el índice de variación se mantiene constante en mayo. ¿Cuánto habrán aumentado los precios respecto de marzo?

3. Analiza y responde.

La tabla muestra la cantidad de animales (en miles) en estado salvaje durante los últimos 4 años, en cierta región.

Tiempo (año)	2017	2018	2019	2020
Animales (cantidad)	5,00	4,00	3,20	2,56

a. Calcula el índice de variación entre cada año.

b. ◆ ¿La variable crece o decrece en el tiempo? ¿Cómo se evidencia en el índice de variación?

c. ◆ ¿Es correcto decir que, durante dos años consecutivos, la disminución en la cantidad de animales fue la misma? ¿Por qué? Justifica.

d. ◆ Si el índice de variación se mantiene, ¿qué se podría esperar a futuro de la vida silvestre en esa zona? Justifica tu respuesta construyendo una tabla para los valores desde el año 2020.

4. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

El crecimiento de un árbol nativo plantado en 2013 se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo (año)	2016	2017	2018	2019	2020
Altura (m)	2,0000	2,4000	2,8800	3,4560	4,1472

a. Calcula el índice de variación entre cada año. ¿Es constante? Justifica.

b. ◆ Si el índice de variación se mantiene constante, ¿qué altura tendrá el árbol en 2021?

c. ◆ Si el índice de variación se mantiene constante, ¿en qué año el árbol medirá aproximadamente 10,3 metros?

d. ◆ Encuentra una expresión algebraica que relacione cualquier par de años consecutivos t y $t + 1$ con el índice de variación del problema.

Podemos representar algebraicamente un fenómeno que involucre un cambio porcentual constante mediante la **ecuación recursiva**:

$$f(t + 1) = Iv \cdot f(t)$$

Donde t representa un periodo (medido en días, décadas, horas, etc...), $t + 1$ el periodo siguiente y $f(t)$ es la cantidad en el periodo t.

5. Encuentra el índice de variación para cada situación. Luego, escríbelo de forma recursiva. Considera que el índice de variación es constante en el tiempo.

Ejemplo: La población (P) de una ciudad aumenta 4 % cada año.
El Iv de un año a otro es 104 % = 1,04. De forma recursiva: $P(t + 1) = 1{,}04 \cdot P(t)$

a. El volumen (V) de un glaciar se reduce en 8,9 % cada año.

b. La tasa de desempleo (d) en Chile aumentó en 7,1 % en el primer trimestre de 2019.

c. El índice de obesidad (O) en un país aumenta en 2,7 % cada año.

d. La tasa de personas diagnosticadas (D) con VIH en Chile aumentó en 30,9 % el año 2019 respecto de 2018.

Considera que la altura del árbol en el año t es igual a f(t).

Economía

6. Analiza y responde en parejas.

Pedro compró un auto en $12 000 000. Cuando preguntó cómo varía su valor de venta, el vendedor le dijo que "el auto se devalúa en 10 % respecto del año anterior".

a. ¿Qué significa que el precio de la camioneta se devalúe? Explica.

b. Inicialmente el auto cuesta $12 000 000, ¿a qué porcentaje de ese valor se puede vender el auto el año que sigue? ¿A qué número decimal corresponde dicho porcentaje?

c. El vendedor le hizo a Pedro una proyección del valor de su auto a medida que pasen los años. Observa.

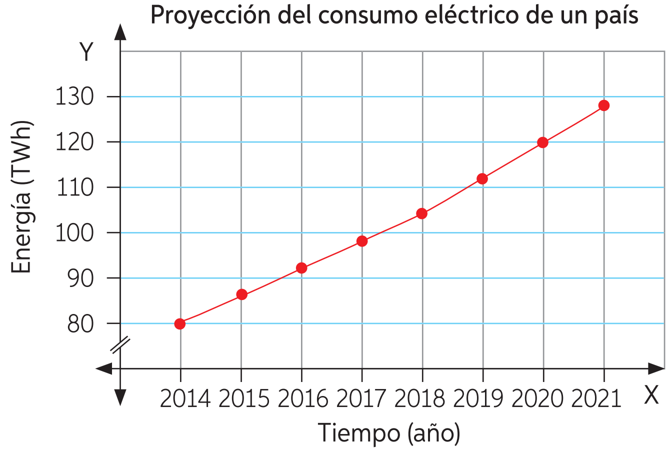
Tiempo de antigüedad (años)	Precio ($)
0	12 000 000
1	10 800 000
2	9 720 000
3	8 748 000
4	7 873 200
5	7 085 880

Completa en tu cuaderno con el valor que relaciona el precio del auto en dos años consecutivos:

$10\,800\,000 = \square \cdot 12\,000\,000$

$9\,720\,000 = \square \cdot 10\,800\,000$

7. ◆ Analiza el gráfico y responde. Considera constante el cambio porcentual entre los años 2014 y 2021.



Tiempo (año)	Energía (TWh)
2014	80,0
2015	85,6
2016	91,6

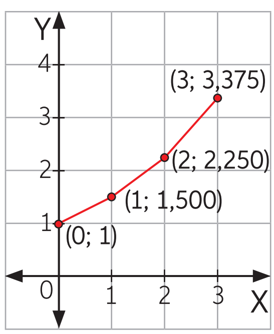
a. ¿Aumenta o disminuye el consumo de energía eléctrica en ese país? ¿En qué intervalo esperarías que se encuentre el índice de variación? Justifica.

b. Encuentra el índice de variación y la ecuación de cambio porcentual que describen la situación planteada. Luego, compáralo con tu respuesta anterior.

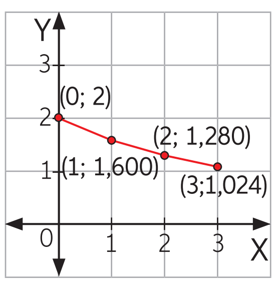
c. Si esta situación se mantiene, ¿a qué niveles de consumo energético llegará el país en 2030?

8. ◆ Analiza los siguientes gráficos y determina el índice de variación.

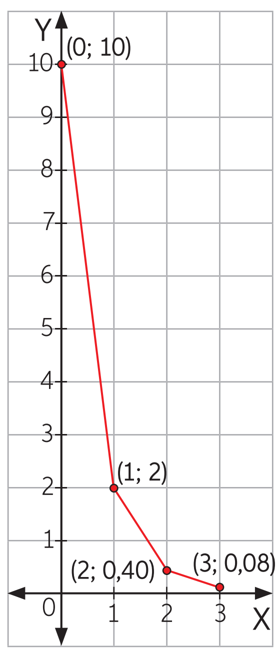
a.



b.



c.



Para concluir

a. Imagina que el índice de variación no fuera constante. ¿Qué sucedería con la representación gráfica del cambio porcentual?

b. ¿En qué se diferencian los gráficos de una situación de crecimiento porcentual y uno de decrecimiento porcentual?

30 a 33

Aplicaciones de cambio porcentual

¿Qué propiedades debe cumplir un fenómeno para ser modelado por una situación de cambio porcentual?

Objetivo: Estudiar fenómenos de cambio porcentual en la vida cotidiana y otras asignaturas.

Economía

1. Al realizar una inversión o ahorro de dinero en un banco u otra entidad, se espera recuperar dicho dinero con una ganancia correspondiente a una fracción del dinero ahorrado de acuerdo con unas condiciones previamente establecidas. Por otro lado, el banco que prestó el dinero espera su devolución, junto con una fracción de este como compensación por el tiempo de uso y por los riesgos del pago del préstamo a tiempo.

   Dentro de este ámbito, se tienen los siguientes conceptos:

   - **Capital inicial (C_i):** cantidad de dinero que se presta o se invierte.
   - **Tasa de interés (r):** razón correspondiente al dinero que se cobra o se paga por cada \$100 de capital en la unidad de tiempo. Generalmente se expresa como un porcentaje.
   - **Tiempo (t):** duración de la inversión o préstamo.
   - **Capital final (C_f):** la suma del capital con el interés.
   - **Interés:** diferencia entre el capital final y el capital inicial.

En el interés compuesto, los intereses obtenidos al final de un período se suman al capital inicial, y el monto así conseguido se considera el nuevo capital para el cálculo de los intereses en el siguiente período.

Después de t períodos, el capital final (C_f) se calcula de la siguiente forma:

$$C_f(t) = C_i \cdot (1 + r)^t,$$

Donde C_i: es el capital inicial, r: tasa de interés por período y t es el número de períodos.

a. Analiza la siguiente situación. Luego, responde lo solicitado.

Se pide un crédito de \$1 000 000 con un interés compuesto del 3% mensual. ¿Cuánto dinero aproximadamente se pagará después de 6 meses?

Datos:
C_i = \$1 000 000
r = 3% = 0,03
t = 6 meses

Se reemplaza en la fórmula $C_f(t) = C_i \cdot (1 + r)^t$ y se tiene:

$C_f(6) = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,03)^6 = 1\,000\,000 \cdot (1,03)^6 \approx 1\,194\,052$

Por lo tanto, al finalizar los 6 meses, se deben pagar aproximadamente \$1 194 052.

De acuerdo a lo anterior, ¿cuánto dinero se pagará por un crédito de \$2 000 000 por un período de 3 meses cuyo interés compuesto es del 4% mensual?

Para calcular el interés compuesto de forma recursiva, se puede utilizar la siguiente expresión:

$$C_f(t + 1) - C_f(t) = r \cdot C_f(t)$$

b. Analiza la situación. Luego, responde lo solicitado.

Datos:

C_i = \$10 000 000

r = 4 % = 0,04

t = 3 meses

¿Cuál es el capital final al invertir un capital inicial de \$10 000 000 a un interés compuesto de 4 % mensual durante 3 meses?

Se calcula el capital final durante el primer mes:

$C_f(1) = 10\,000\,000 \cdot (1 + 0,04)^1 = 10\,000\,000 \cdot 1,04 = 10\,400\,000$

Luego, se aplica la forma recursiva del interés compuesto

$$\begin{aligned}
C_f(2) - C_f(1) &= 0,04 \cdot C_f(1) \Rightarrow \text{se despeja } C_f(2)\\
C_f(2) &= 0,04 \cdot C_f(1) + C\,f(1)\\
&= 1,04 \cdot C_f(1)\\
&= 1,04 \cdot 10\,400\,000\\
C_f(2) &= 10\,816\,000\\
C_f(3) - C_f(2) &= 0,04 \cdot C_f(2) \Rightarrow \text{se despeja } C_f(3)\\
C_f(3) &= 0,04 \cdot C_f(2) + C_f(2)\\
&= 1,04 \cdot C_f(2)\\
&= 1,04 \cdot 10\,816\,000\\
C_f(3) &= 11\,248\,640
\end{aligned}$$

El capital final será \$11 248 640, aproximadamente.

¿Cuál es el capital final al invertir el mismo capital (\$10 000 000) a un interés compuesto de 4% mensual durante 5 meses? Usa la forma recursiva para calcular.

Para el cambio porcentual constante debes considerar: Identificar las variables y su relación, comprobar que los datos satisfacen las formas algebraicas asociadas, aplicar la expresión algebraica para proyectar resultados o valores a futuro, representar los datos de manera gráfica o mediante tablas favorece la comprensión del fenómeno y su comportamiento.

En problemas de esta índole es común que las incógnitas se encuentren en el exponente o en la base de una potencia. Por ello, es importante recordar nociones de logaritmos y raíces enésimas, para despejarlas y responderlas.

Ciencias sociales

2. En cierta zona rural en 1970 habitaban solo 500 personas. En ese entonces, la tasa de crecimiento poblacional era de 3 % anual. El modelo matemático que rige el crecimiento porcentual de la población es $P(t) = A \cdot r^t$.

a. ¿Qué representan los parámetros A y r en esta expresión? ¿Cuáles son sus valores en esta situación?

b. Escribe la ecuación recursiva que describe el aumento de la población año a año en dicha zona. Luego, determina la ecuación explícita.

c. ¿Qué significa $P(8)$? Explica y encuentra su valor.

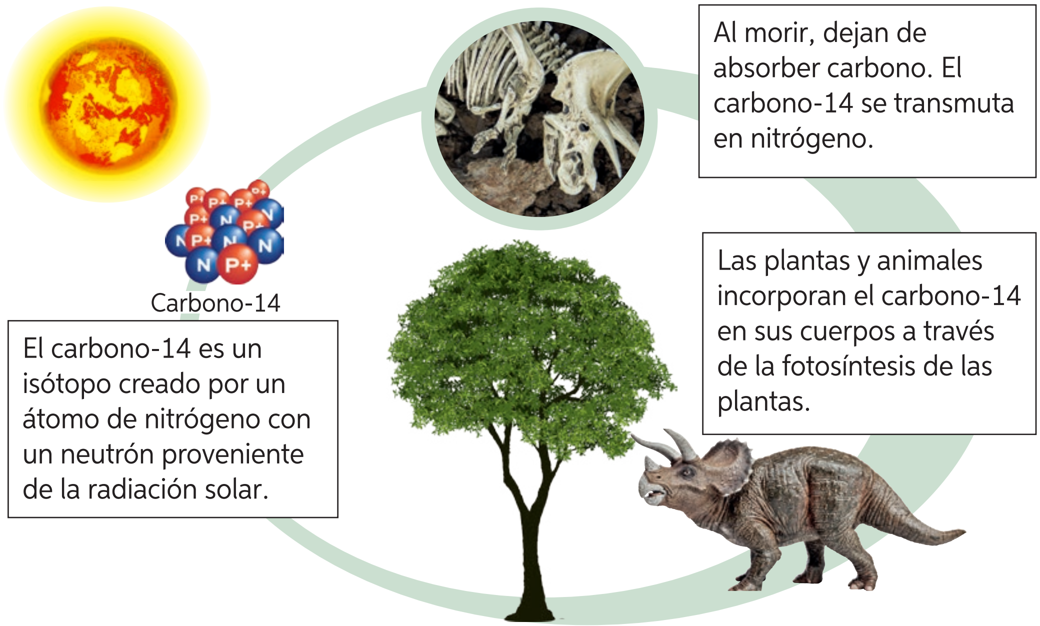
d. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

Tiempo (año)	Tasa de crecimiento *t* (%)	Población (*P*(*t*))
1970	0	500
1971		
1972		
1973		

3. La cantidad de núcleos radiactivos N existentes en el tiempo t sigue el modelo:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T}$$

Donde N_0 es el número de núcleos radiactivos iniciales y T es el tiempo de vida media característico de cada sustancia radiactiva.



a. El isótopo radioactivo carbono-14 tiene una vida media de 5730 años. ¿Qué significa esto?

b. Completa la tabla en tu cuaderno:

t (años transcurridos)	0	5730	11 460	17190	22920	28650	34380
Carbono-14 (%)	100						

c. ¿Qué porcentaje de átomos de carbono-14 permanecerán en una muestra tras 57 300 años?

d. Se encuentran restos arqueológicos con 20 % de carbono-14 en relación con una muestra viva. ¿Qué antigüedad tienen estos restos?

Para concluir

a. ¿Qué otros fenómenos de la vida cotidiana pueden ser representados mediante una ecuación de cambio porcentual? Da 3 ejemplos.

b. ¿Cómo describirías la diferencia en el crecimiento entre el interés simple y el compuesto?

34 a 37

Antes de continuar

¿A dónde va el dólar?

Materiales:
- Acceso a Internet para buscar la información.
- Computador con Microsoft Excel o similar.

En grupos de 3 integrantes, analizarán el cambio porcentual del precio del dólar en los últimos 20 días. Utilicen una planilla de cálculo.

Paso 1: Busquen en Internet el registro del precio del dólar en los últimos 20 días. Anótenlos en una planilla de Excel, como la del ejemplo.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	
4	7	855,42	
5	8	855,42	
6	9	855,42	
7	10	863,59	
8	11	868,67	

En el ejemplo se utiliza el precio del euro desde el 6 al 11 de febrero de 2020 (https://si3.bcentral.cl/)

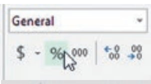
Paso 2: Se asigna inicialmente 0 en la primera casilla de la variación porcentual.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	=1-B3/B4
5	8	855,42	
6	9	855,42	
7	10	863,59	
8	11	868,67	

a. ¿Por qué se asigna este primer valor? ¿Se podría haber asignado otro valor? Expliquen.

Paso 3: Calculen la variación porcentual en cada caso.

b. ¿Cómo obtienen esta fórmula para el cálculo de la variación porcentual?



	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	0,000538
5	8	855,42	0,000000
6	9	855,42	0,000000
7	10	863,59	0,009461
8	11	868,67	0,005848

Paso 4: Traspasen a porcentaje los valores obtenidos.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	0,05%
5	8	855,42	0,00%
6	9	855,42	0,00%
7	10	863,59	0,95%
8	11	868,67	0,58%

c. Elijan un par de datos de la tabla. Comprueben manualmente el cambio porcentual.

d. Construyan un gráfico que permita visualizar el cambio porcentual del dólar.

e. ¿Podrían predecir qué pasará con el valor del dólar en los próximos días? ¿En qué basan su respuesta? Justifiquen.

Reflexiono

a. ¿Cómo evalúo mi participación en esta actividad?

b. ¿Qué utilidad tiene Excel u otra planilla de cálculo en la asignatura? Justifica

c. ¿Qué importancia tiene la variación del dólar en nuestro país?

38 y 39

Lección

5 Ecuaciones de segundo grado

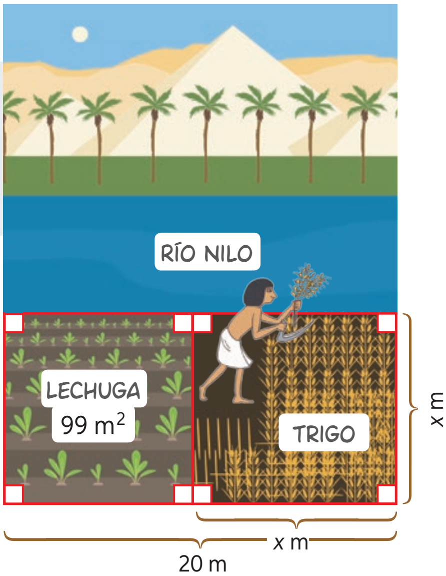
La ecuación de segundo grado

¿Cómo describirás una ecuación?
¿Qué significa que una expresión está al cuadrado?
¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

Objetivo: Identificar una ecuación de segundo grado y sus componentes.

1. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

En el antiguo Egipto, debido a las crecidas del río Nilo, las divisiones entre los terrenos aptos para la agricultura eran periódicamente borradas. Para ello, existían agrimensores especializados en realizar las mediciones de terrenos.



a. ¿Cuál es el área total destinada a lechugas? ¿Qué expresión algebraica representa el área destinada a sembrar trigo?

b. ¿Qué expresiones algebraicas puedes plantear para el área total de ambos terrenos? Compara tu respuesta.

c. Iguala la suma de las expresiones obtenidas en *a* con la expresión obtenida en *b*. Luego, despéjala de tal forma que quede 0 a un lado de la ecuación. ¿Qué características tiene la ecuación? ¿Qué diferencias tiene con una ecuación lineal?

d. ◆ Luego de algunos cálculos, un agrimensor determina que el lado del terreno destinado a sembrar trigo debería medir 11 m o 9 m. Reemplaza estos valores en la expresión anterior, Luego, responde: ¿cuál es correcto?, ¿por qué?

Una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Donde *a*, *b* y *c* son llamados coeficientes de la ecuación. Las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces o soluciones, las cuales denotaremos como x_1 y x_2, y se dividen en:

Raíces reales distintas	Raíces reales iguales	No pertenece a los reales
Ejemplo: $x^2 + 4x + 3 = 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$	Ejemplo: $-2x^2 + 8x - 8 = 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$	Ejemplo: $x^2 + x + 2 = 0$ $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

Por ejemplo, la ecuación $3x^2 + 2x = 0$ es **incompleta** y tiene coeficientes $a = 3$, $b = 2$ y $c = 0$, mientras que $2x^2 + x - 3 = 0$ es **completa** con coeficientes $a = 2$, $b = 1$ y $c = -3$.

2. Identifica cuáles de estas ecuaciones corresponden a ecuaciones de segundo grado. Determina sus coeficientes *a*, *b* y *c* en caso de que lo sean:

a. $x + 3 = 2$

b. $x^2 - \frac{1}{3} = 0$

c. $3x - 25 = 6$

d. $x^2 + 6x = 2$

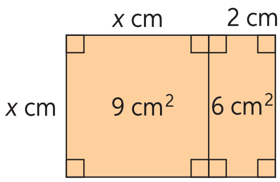
e. $3x^2 - 5 = 0$

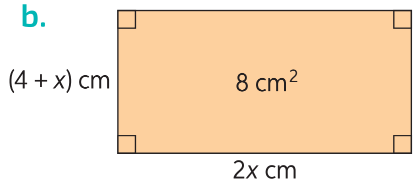
f. $6{,}5x^3 - 9 = 0$

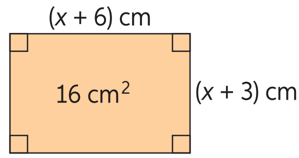
g. $(x - 5)(x + 3) = 0$

h. $(3x - 2) + 6x = 8$

3. ¿Qué ecuación de segundo grado representa el área de las siguientes figuras?

a. 

b. 

c. 

4. ◆ ¿Qué significa que la solución de la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ es $x = -1$? Argumenta.

5. ◆ Considera las siguientes ecuaciones y sus posibles raíces:

Ecuación	Posibles raíces		
$x(x-5)=0$	7	–5	0
$(x+1)x=0$	2	1	–1
$(x+10)(x+2)=0$	5	2	–2

Ecuación	Posibles raíces		
$(x-14)(x-8)=0$	12	8	–8
$(x+7)(x-5)=0$	2	5	–7
$2x(x-2)=0$	0	1	–1

a. ¿Cuáles son las posibles raíces que satisfacen la ecuación en cada caso?

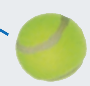
b. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar las soluciones anteriores?

Física

6. ◆ Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Para conocer la altura h a la cual se encuentra un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, despreciando el roce con el aire, se emplea la siguiente expresión:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$



h_0: Altura inicial
v_0: Rapidez inicial
t: Tiempo transcurrido
g: Aceleración debida a la gravedad
⟶: Considera g como 10m/s^2

Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 50 m/s desde una altura de 5 metros.

a. ¿Cuál es la ecuación que representa su altura?

b. ¿A qué altura se encuentra el cuerpo al cabo de 3 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

c. ¿En cuántos segundos vuelve a tener la altura inicial?

d. Compara la expresión anterior con la forma de la ecuación de segundo grado. ¿Cuáles son los valores de los coeficientes a, b y c?

Para concluir

a. ¿Qué es una ecuación cuadrática? Explica con tus palabras.

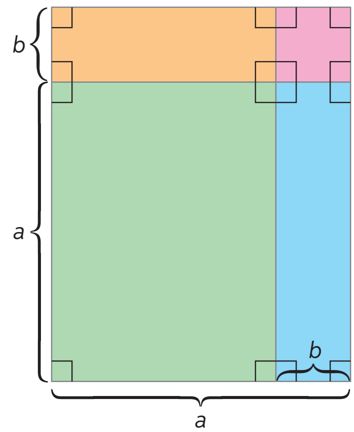
b. ¿Qué son las raíces de una ecuación cuadrática?

40 a 43

Resolución de una ecuación de segundo grado por factorización

¿Qué es una factorización?
¿Qué son los productos notables y cuáles conoces?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización.



1. Copia la figura e identifica los colores de los cuadriláteros cuyas áreas sean equivalentes a:

a. b^2

b. a^2

c. $a^2 + ba$

d. $b^2 + ba$

e. $a^2 - ba$

f. $ba - b^2$

2. Lee la siguiente información. Luego, responde:

Se quiere cubrir con planchas de pizarreño, el techo de un quincho de una casa. Dicho techo tiene forma rectangular cuyo largo mide tres metros más que su ancho y su área es 10 m^2 .

a. Si el ancho del techo es *x* metros, ¿cuál es el largo? Escríbelo en términos de *x*.

b. La ecuación de segundo grado que relaciona el área del techo con sus dimensiones se puede expresar como:

$$x \cdot (x + 3) = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x = 10$$

Al ordenar la ecuación anterior de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Completa en tu cuaderno la factorización de la ecuación.

$$(x + 5) \cdot \boxed{} = 0$$

Recuerda las factorizaciones:

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + (p + q)a + pq = (a + p)(a + q)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$

c. Iguala cada factor a cero. Luego, resuelve las ecuaciones lineales para obtener los valores de x_1 y x_2.

> Si la multiplicación de dos números *A* y *B* es 0, entonces se cumple que al menos uno de los dos es igual 0, es decir:
>
> Si $A \cdot B = 0$, se tiene:
>
> $A = 0 \vee B = 0$

d. ◆ Reemplaza los valores de x_1 y x_2 en las dimensiones del techo. ¿Son ambas soluciones adecuadas para determinar las dimensiones del techo? Justifica.

e. ◆ ¿Cuáles son las dimensiones del techo del quincho?

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita es la factorización. Este método consiste en factorizar e igualar a cero cada uno de sus factores. De este modo, se despeja la incógnita en cada uno de ellos.

Ejemplo: $x^2 + 4x - 21 = 0$

$(x + 7)(x - 3) = 0$

$x + 7 = 0 \longrightarrow x_1 = -7$ o $x - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = 3$

◆ "Para el caso de la factorización, resolver una ecuación cuadrática es equivalente a resolver dos ecuaciones lineales". Explica con tus palabras la afirmación anterior.

3. Resuelve las ecuaciones de segundo grado factorizando con el producto notable pedido. Guíate por los ejemplos:

a. Mediante término común:

Ejemplo: $3x^2 - 9x = 0$

Paso 1: Se identifica el término común. En este caso es $3x$.

Paso 2: Se reescribe la ecuación utilizando el factor: $3x \cdot (x - 3) = 0$

Paso 3: Se resuelve: $3x = 0 \longrightarrow x_1 = 0$ o $x - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = 3$

I. $x^2 - 7x = 0$
II. $6x^2 + 6x = 0$
III. $18x^2 + 15x = 0$
IV. $5x^2 + 23x = 0$

b. Mediante cuadrado de binomio:

Ejemplo $x^2 - 6x + 9 = 0$

Paso 1: Se busca un número que cumpla con $2k = -6$ y $k^2 = 9$. En este caso corresponde a -3.

Paso 2: Se factoriza y resuelve: $(x - 3)(x - 3) = 0$
$(x - 3)^2 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 = 3$

I. $x^2 + 2x + 1 = 0$
II. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$
III. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
IV. $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$

c. Mediante diferencia de cuadrados:

Ejemplo: $9x^2 - 81 = 0$

Paso 1: Identificamos los elementos al cuadrado. Este caso $3x$ y 9.

Paso 2: Utilizando la factorización, reescribimos: $(3x)^2 - (9)^2 = 0 \rightarrow (3x - 9)(3x + 9) = 0$

Paso 3: Resolvemos: $3x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3$ o $3x + 9 = 0 \rightarrow x_2 = -3$

I. $x^2 - 16 = 0$
II. $4x^2 - \frac{1}{9} = 0$
III. $25x^2 - 2 = 0$
IV. $3x^2 - \frac{1}{12} = 0$

d. Mediante factorización de trinomio:

Ejemplo: $5x^2 + 4x - 12 = 0$

Paso 1: Se identifican los factores de $5 \cdot (-12) = -60$ que sumen 4, en este caso, 10 y −6.

Paso 2: Reescribimos y factorizamos:
$5x^2 + 10x - 6x - 12 = 0 \longrightarrow 5x(x + 2) - 6(x + 2) = 0 \longrightarrow (5x - 6)(x + 2) = 0$

Paso 3: Resolvemos: $5x - 6 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{6}{5}$ o $x + 2 = 0 \longrightarrow x_2 = -2$

I. $-10x^2 - 7x + 12 = 0$

II. $-6x^2 + 7x + 5 = 0$

III. $18x^2 + 17x - 15 = 0$

IV. $6x^2 + 23x + 20 = 0$

4. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización.

a. $3x^2 - 27 = 0$

b. $4x^2 - 121 = 0$

c. $x^2 - 8x = -12$

d. $100 - 25x^2 = 19$

e. $x^2 - 5x + 6 = 0$

f. $x^2 - 14x + 49 = 0$

g. $x^2 + 4x - 60 = 0$

h. $x(x - 3) = 4$

i. $x^2 - 8x + 3 = x - 5$

j. $5x^2 - 13x = 3x$

◆ ¿Qué criterios utilizaste para determinar qué producto notable utilizar en cada caso? Comenta con tu curso.

5. ◆ Plantea la ecuación cuadrática para cada situación y resuélvela. Luego, comprueba tus resultados e indica la pertinencia de sus soluciones.

a. El ancho de un cuadro de pintura es 3 metros menos que su largo y su área es 18 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del cuadro?

b. Dos números sumados dan como resultado 10, pero al multiplicarlos se obtiene −24. ¿Cuáles son dichos números?

c. Rayén construirá su casa en un terreno rectangular de 96 m^2. Para concederle un permiso de construcción le solicitan las dimensiones del terreno. Si el largo del terreno es seis veces su ancho, ¿cuáles son las medidas?

d. Mauricio sabe que las soluciones de una ecuación cuadrática son $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$. ¿Cuál puede ser la ecuación cuadrática?

◆ ¿Es única la ecuación anterior? ¿Por qué?

Para concluir

a. ◆ Describe el proceso general utilizado para resolver una ecuación de segundo grado con factorización. ¿Qué aspectos debes considerar para que la ecuación se pueda factorizar?

b. ◆ Considera la ecuación $x^2 + kx - 5 = 0$. ¿Qué valor debe tener k para que, al factorizar, uno de los factores sea $(x - 5)$?

44 a 47

Resolución de una ecuación de segundo grado por completación de cuadrados

¿Qué es un binomio?
¿Cómo factorizas un cuadrado de binomio?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante completación de cuadrados.

1. Determina en cada caso el valor de k para que la expresión algebraica sea un cuadrado de binomio perfecto.

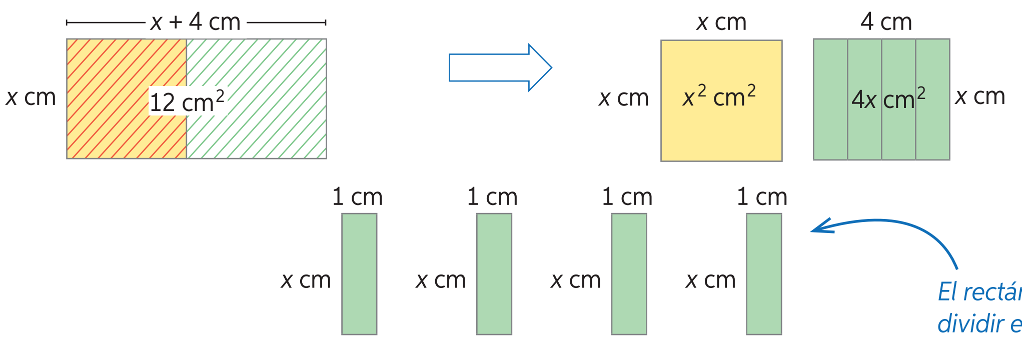
a. $x^2 + 14x + k$ **b.** $x^2 - 12x + k$ **c.** $x^2 - 3x + k$ **d.** $x^2 - 16x + k$

◆ ¿Es posible utilizar la misma estrategia para determinar el valor de k en la expresión algebraica $ax^2 + bx + k$? ¿Por qué?

2. ◆ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

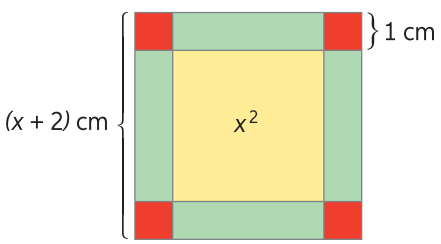
¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de área 12 cm^2 si uno de sus lados mide 4 cm más que el otro?

Planteamos: *Dividimos la figura*



El rectángulo se vuelve a dividir en 4 rectángulos de lados 1 cm y x cm.

Luego, los acomodamos alrededor del cuadrado de lado x formando la figura:



Finalmente, para completar el área del cuadrado de lado (x + 2) cm debemos agregar 4 cuadrados de lado 1 cm (■) a la figura original.

Algebraicamente tenemos:
$12 + 4 = (x + 2)^2 \longrightarrow 16 = (x + 2)^2$

a. ¿Es posible resolver la ecuación planteada mediante el método de factorización?

b. Describe paso a paso el procedimiento anterior con tus palabras.

c. Desarrolla la expresión final. ¿Es equivalente a la ecuación planteada originalmente?

d. Utilizando la última expresión, determina los valores de x. Luego, responde: ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

3. Para resolver la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$, Carolina realiza lo siguiente:

Paso 1: $x^2 - 10x = -21$

Paso 2: $x^2 - 10x + 25 = -21 + 25$

Paso 3: $(x - 5)^2 = 4$

Paso 4: $(x - 5)^2 - 2^2 = 0$

$((x - 5) - 2) \cdot ((x - 5) + 2) = 0$

$(x - 5) - 2 = 0$ o $(x - 5) + 2 = 0$

$x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$

$x_1 = 7$ o $x_2 = 3$

a. ◆ ¿Por qué en el paso 2 Carolina sumó 25 a ambos lados de la ecuación? ¿cuál fue el propósito?

b. ◆ ¿Podría haber resuelto la ecuación utilizando la factorización? Explica.

c. ◆ ¿Qué producto notable está involucrado en la resolución? ¿Cuál es su utilidad?

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado es utilizar la **completación de cuadrados**. Para ello, sigue estos pasos:

Paso 1: Despejar el término libre de la ecuación.

$5x^2 - 3x - 2 = 0 \longrightarrow 5x^2 - 3x = 2$

Paso 2: Despeja el término cuadrático del coeficiente *a*.

$5x^2 - 3x = 2 \quad / \cdot \frac{1}{5}$

Paso 3: Completar el cuadrado de binomio sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* para luego factorizarlo.

$x^2 - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5} \quad$ /Se suma $\frac{9}{100}$ para formar $\left(x - \frac{3}{10}\right)^2$.

$x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{100} = \frac{2}{5} + \frac{9}{100} \quad$ /Factorizando:

$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$

Paso 4: Encontrar las soluciones de la ecuación mediante la factorización $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, considerando el cuadrado de binomio como uno de los términos.

$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0$

$\left(\left(x - \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\left(x - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{7}{10}\right)\right) = 0$

$x - \frac{3}{10} - \frac{7}{10} = 0$ o $x - \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 0$

$x - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ o $x - \frac{3}{10} = -\frac{7}{10}$

$x_1 = 1$ o $x_2 = -\frac{2}{5}$

¿Qué otro procedimiento puedes utilizar en reemplazo de los pasos 3 y 4?

4. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones mediante la completación de cuadrados:

a. $3x^2 + 3x - 6 = 0$

b. $4x^2 + x = 3$

c. $4x - 4x^2 + 3 = 0$

d. $9x^2 - 6x = 0$

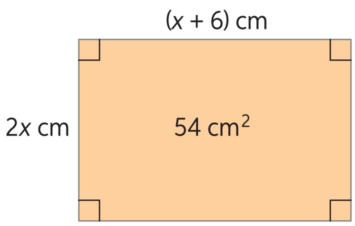
e. $12x^2 - 5 + 4x = 0$

f. $x^2 - 10x - 65 = 0$

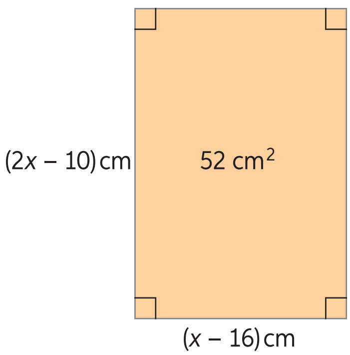
5. ◆ Algunas ecuaciones, como $x^2 - 4x + 5 = 0$, no pueden ser factorizadas luego de formar el cuadrado de binomio. Desarrolla la expresión y explica a qué se debe.

6. ◆ Plantea la ecuación correspondiente a cada figura. Luego, determina el valor de x mediante el método de completación de cuadrados.

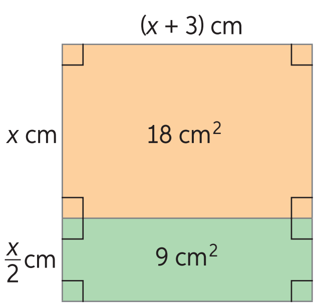
a.



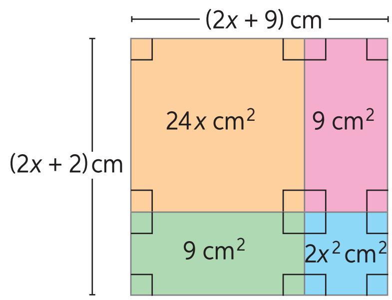
b.



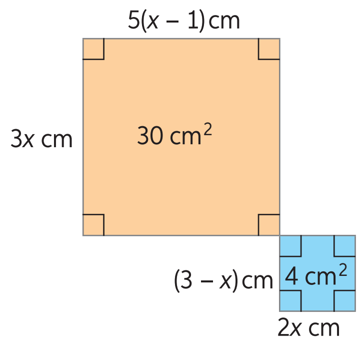
c.



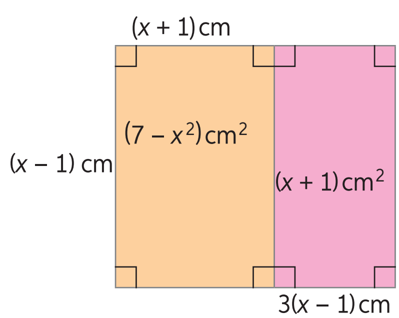
d.



e.



f.



Para concluir

a. ◆ ¿En qué casos es conveniente aplicar el método de completación de cuadrados?

b. Juan piensa en un número entero. Ese número es tal que el cuadrado del antecesor de su doble es equivalente al cuadrado del número aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

48 a 51

Resolución de una ecuación de segundo grado por fórmula general

¿Se puede aplicar el método de completación de cuadrados a cualquier ecuación de segundo grado? ¿Por qué?

¿Qué características crees que tienen las ecuaciones sin solución en reales?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante fórmula general.

1. Analiza los siguientes pasos para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \; / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. ¿A qué estrategia de resolución corresponden los pasos anteriores?

b. ◆ ¿Qué operaciones se realizaron para llegar a la fórmula final?

c. ◆ ¿Por qué se agrega el signo ± a $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$?

d. ◆ ¿Cuáles son las soluciones x_1 y x_2 obtenidas de la fórmula?

2. Identifica los coeficientes de las ecuaciones y resuelve utilizando la fórmula anterior. Guíate por el ejemplo:

Ejemplo: $3x^2 - 5x + 1 = 0$ Identificamos los coeficientes de la ecuación: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 1$

Reemplazamos los valores: $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

Se obtienen las soluciones: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$; $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$

a. $12x^2 + 3x - 5 = 0$

b. $6x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $12x - 5 = -4x^2$

d. $14x^2 - 8 = 0$

e. $a^2 + 48a + 576 = 0$

f. $6b^2 - 4b - 2 = 0$

g. $x^2 + 6x = 27$

h. $1 + 9x^2 = 6x$

i. $10x^2 + 31x - 14 = 0$

j. $9 = 7x^2 - 2x$

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, es posible obtener sus soluciones mediante la **fórmula general**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. ◆ Resuelve la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$ utilizando factorización, completación de cuadrados y fórmula general. Luego, realiza las actividades.

a. Compara los resultados obtenidos por cada método. ¿Qué puedes concluir sobre ellos?

b. ¿Cuál de los métodos te resultó más fácil de utilizar en este caso? ¿Por qué?

4. Considera las ecuaciones cuadráticas:

Ecuación 1: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}x - \frac{1}{4} = 0$	Ecuación 2: $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$

a. Resuélvelas mediante la fórmula general.

b. ◆ ¿Cómo son las soluciones de ambas ecuaciones? ¿A qué se debe? Explica con tus palabras.

c. ◆ Crea otra ecuación equivalente y resuélvela.

5. Aplica la fórmula general a las siguientes ecuaciones. Luego, responde.

a. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

b. $5x^2 - 10x + 5 = 0$

c. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

Recuerda que las soluciones pueden ser:
- *Reales iguales*
- *Reales distintas*
- *No pertenecen a reales*

d. ◆ ¿Qué tipo de soluciones tiene cada una de las ecuaciones anteriores?

e. ◆ ¿Qué parte de la fórmula general es la que discrimina los tipos de soluciones?

f. ◆ ¿Qué condiciones debe cumplir a, b y c para que tengan soluciones reales?

El **discriminante** ($\triangle$) de una ecuación cuadrática de fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Mediante el valor del discriminante de una ecuación cuadrática, es posible determinar la existencia de las soluciones. Se pueden dar tres casos:

$\triangle > 0$	$\triangle = 0$	$\triangle < 0$
La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.	La ecuación tiene dos soluciones reales iguales.	La ecuación no tiene solución en los reales.

6. Calcula el discriminante y determina el tipo de solución de las ecuaciones.

Ejemplo: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Identificamos los coeficientes de la ecuación: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$.

Determinamos el discriminante: $\triangle = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1$.

Respondemos: $\triangle = 1$ y la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

a. $21 + 27x^2 = 0$

b. $x^2 + 3x - 10 = 0$

c. $6x^2 + 11x + 3 = 0$

d. $3x - 4x^2 - 5 = 0$

e. $16x^2 + 16x = -4$

f. $\frac{6}{5}x^2 + 1 = \frac{x}{2}$

7. ◆ Determina el valor de m para que las siguientes ecuaciones cuadráticas cumplan con las condiciones pedidas:

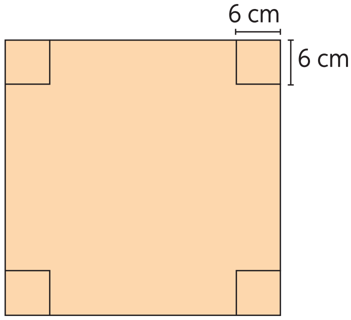
Ecuación 1: $4x^2 + 4x + m = 0$	**Ecuación 3:** $2mx^2 - 3mx + 7 = 0$
Ecuación 2: $2x^2 + m^2 = 3mx$	**Ecuación 4:** $mx^2 + (m + 1)x + \frac{m}{2} = 0$

a. No tenga solución.

b. Tenga dos soluciones reales e iguales.

c. Tenga dos soluciones reales y distintas.

8. Con un cartón de forma cuadrada, se quiere construir una caja sin tapa (con forma de prisma de base cuadrada). Para esto, se le corta un cuadrado de 6 cm de lado en cada uno de sus vértices. Si se sabe que el volumen de la caja debe ser de 216 cm^3, ¿cuál es la medida del lado del cartón?



Actividades de profundización

9. ◆ Analiza la siguiente proposición. Luego, realiza las actividades.

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se cumplen las propiedades:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

a. Selecciona o crea dos ecuaciones (con solución en reales) y comprueba las propiedades anteriores.

b. Utilizando que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, demuestra las propiedades anteriores.

c. Crea una ecuación en que la suma sea 0 y el producto de sus raíces sea −1.

◆ En parejas, comparen el resultado de la actividad anterior. ¿Utilizaron la misma estrategia para crear la ecuación? ¿Crearon la misma ecuación?

Para concluir

a. ◆ ¿Cómo podrías determinar el método más conveniente para resolver en cada caso?

b. ◆ ¿Qué característica debe tener el discriminante para que las soluciones sean números racionales? ¿Y para que sean irracionales?

52 a 55

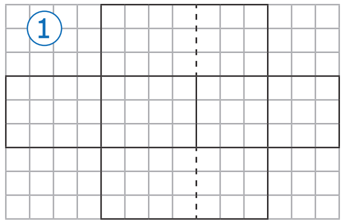
Antes de continuar

Papel, flechas y ecuaciones cuadráticas

A continuación, construirás un material para identificar los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas (en función del valor de sus coeficientes) y su resolución.

Materiales:
- Cartulina o papel lustre de colores.
- Plumones.
- Lápices de colores.
- Tijeras.
- Pegamento.

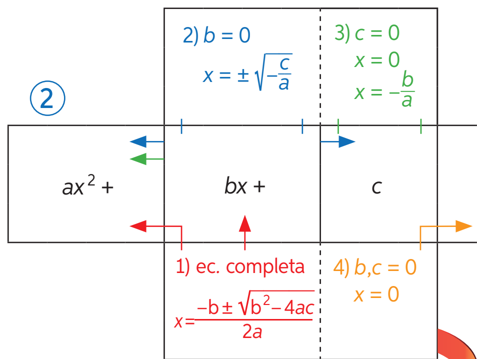
Paso 1: Corta un trozo de cartulina con el diseño 1, respetando las proporciones de la cuadrícula en cada cuadrado y rectángulo. Asegúrate de cortar también las líneas para crear pestañas.

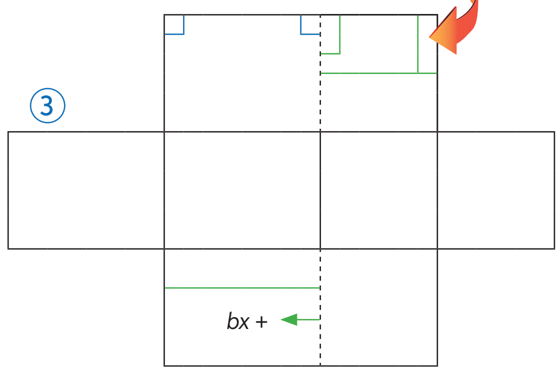


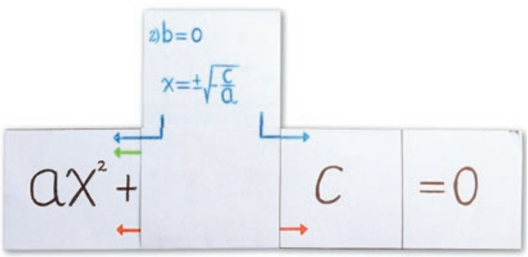
Paso 2: Cuidando siempre de utilizar el mismo código de colores, dibuja por el frente de la pieza el diseño 2.

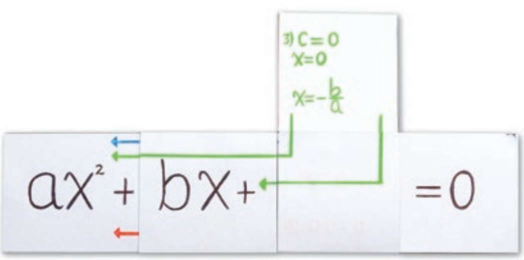
Paso 3: Da vuelta la pieza hacia abajo, de modo que la cara "= 0" siga a la derecha. Luego, dibuja por el revés de la pieza el diseño 3.

Paso 4: Ahora, dobla las pestañas convenientemente para mostrar cada caso (1, 2, 3 o 4). Guíate por las siguientes fotografías:









Utilizando el material, guíate para identificar y resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2 - 1 = 0$

b. $x^2 - 2x + 1 = 0$

c. $3x^2 - 12x = 0$

d. $20 - 2x^2 + 3x = 0$

e. $x^2 = 9$

f. $8x^2 - 3x = 0$

Reflexiono

a. Identifica los problemas que podrías tener al construir este material.

b. ¿Crees que este material te permitirá trabajar mejor las ecuaciones?

56 y 57

Lección
6 Funciones de segundo grado

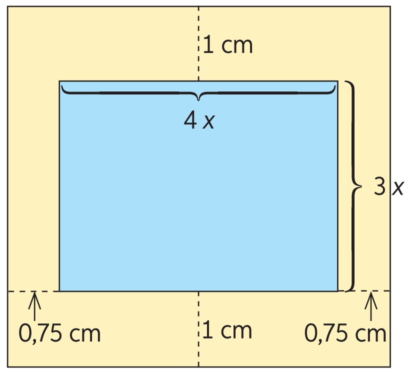
Función cuadrática

Objetivo: Identificar la función cuadrática y sus componentes.

¿Qué es una función? ¿Qué la diferencia de una ecuación? Explica con tus palabras.
¿Qué es una función lineal? ¿y una función afin?

1. Analiza la siguiente situación y responde:

Se quiere pintar un cuadro cuyos lados están en la razón 4 : 3. El área total incluyendo el borde del marco está dada por:



Total vertical: 3x + 2 *Total horizontal: 4x + 1,5*

Área total: $A_t = (3x + 2)(4x + 1,5)$

$$A_t = 12x^2 + \frac{25}{2}x + 3$$

a. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

x	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
1			
2			
3			
4			
5			

b. Si el área total es de 27,5 cm^2, ¿cuáles serán las medidas de los lados de la viñeta?

c. ◆ El precio fijado es \$1000 por cm^2 de ilustración. ¿Qué cambios es necesario realizar en la fórmula?

d. ◆ ¿Cómo describirías el crecimiento del área a medida que aumenta el valor de x? ¿Y el del precio por ilustración?

Se llama **función cuadrática o de segundo grado** a las funciones de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Donde a, b y c corresponden a los coeficientes de la función. El dominio de la variable x de la función es $\mathbb{R}$, mientras que su recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $g(x) = 2x^2 + 2x + 0{,}5$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y recorrido los reales mayores o iguales a 0.

2. Identifica si las expresiones corresponden a funciones cuadráticas. Justifica.

a. $f(x) = 3x - 2$

b. $g(x) = 2x^3 - 4$

c. $h(x) = (5x - 2)(-3)$

d. $i(x) = (2x + 3)(x + 1)$

e. $j(x) = (x + 2)(3x - 1)$

f. $k(t) = 12\sqrt{t} - 1$

3. Considera las funciones y sus coeficientes para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

Función	a	b	c
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$			
	2	5	16
$t(x) = (4x - 1)(2x + 3)$			

4. En cada una de las funciones, calcula la imagen para $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = -1$.

Ejemplo: $p(x) = 3x^2 - x + 2$, si $x = 1 \rightarrow p(1) = 3(1)^2 - 1 + 2 \rightarrow p(1) = 4$

a. $f(x) = 12x^2 - 3x - 1$

b. $g(x) = x^2 - 5x + 1$

c. $a(x) = 4x^2 - 6x + 1$

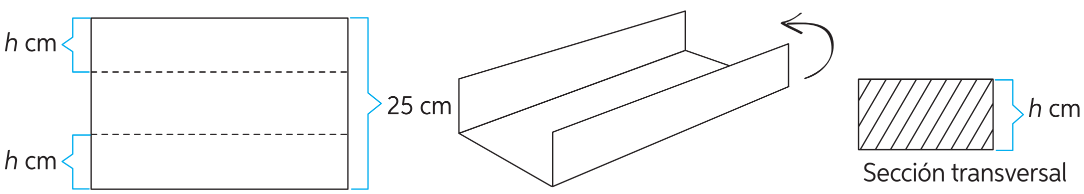
d. $h(x) = (7x - 2)(9 - 3x)$

Recuerda que:
– preimagen: valor de x.
– imagen: valor de y.

Actividades de profundización

5. Analiza la siguiente situación y responde.

Se quiere construir una canaleta con una lámina de aluminio de 25 centímetros de ancho. Para ello, se la doblará h cm en ambos lados, como se muestra en la imagen.



a. ◆ ¿Cuál es la expresión para el área de la sección transversal de dicha canaleta en función de su altura h?

b. ¿Qué valores puede tomar h para que el área de la sección transversal sea 75 cm^2?

c. ◆ ¿Entre qué intervalo de valores se encuentra h? Discute con tu curso.

Para concluir

a. Si $f(x) = 10x^2 + 11x + 3$, ¿cuál es el valor de $f(2,\overline{9})$?

b. ◆ ¿En qué se diferencian la función cuadrática y la ecuación de segundo grado? Explica y da un ejemplo que muestre la diferencia.

58 a 60

Representación de una función cuadrática

Objetivo: Representar la función cuadrática en el plano cartesiano.

¿Cuáles son las variables dependientes e independientes de una función?

¿Qué pasos realizas para graficar una función lineal?

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

Fernanda y Rodrigo practican con su patineta en la rampa de un parque. Sus velocidades (en m/s) en función del tiempo s (medido en segundos) se representan por las funciones:

$v_F(t) = -t^2 + 4t \qquad v_R(t) = -t^2 + 3t$

a. Completa las tablas de datos para cada función.

Tiempo t (segundos)	Función $v_F(t)$ (velocidad)
0	
1	
2	
3	
4	

Tiempo t (segundos)	Función $v_R(t)$ (velocidad)
0	
1	
2	
3	
4	

b. ◆ Grafica los datos de las tablas anteriores en un plano cartesiano. Ubica la variable tiempo (segundos) en el eje X y la variable velocidad (v) en el eje Y.

c. ◆ ¿Para qué valores de t se cumple $v(t) = 0$? ¿cómo lo interpretarías según el contexto del problema?

d. ◆ ¿Qué forma tienen las gráficas anteriores? ¿Cómo trazarías el resto de la función?

e. ◆ Según la gráfica anterior, ¿cuál es la mayor velocidad que alcanza cada uno? ¿Tiene alguna relación con los parámetros de cada ecuación?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP065A

2. Construye una tabla de datos para cada función. Identifica 5 puntos (x, y) de cada una y luego grafícalos en tu cuaderno.

a. $f(x) = -x^2 + 1$ para $0 \leq x \leq 5$.

b. $g(x) = x^2 + 2x$ para $-3 \leq x \leq 3$.

c. $h(x) = -2x^2 + 3x - 2$ para $-2 \leq x \leq 4$.

d. $i(x) = -4x^2 + 4x - 2$ para $-5 \leq x \leq 5$.

e. $j(x) = 5x^2 + 10x - 15$ para $-5 \leq x \leq 5$.

f. $k(x) = -3x^2 + 6x + 9$ para $-5 \leq x \leq 5$.

g. ◆ Une los puntos y responde: ¿"se abren" hacia arriba o hacia abajo las curvas? ¿Qué relación existe entre lo anterior y el coeficiente a de cada función?

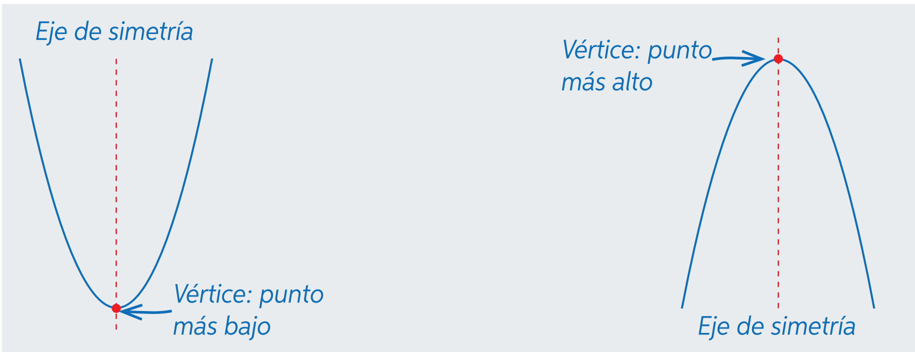
h. ◆ ¿Cuál es el dominio y recorrido de cada función?

El gráfico de una función cuadrática se representa mediante una **parábola**. Esta curva cumple con lo siguiente:

- Tiene un **vértice**, que corresponde a su punto más alto o más bajo.
- Es simétrica respecto del eje Y o a una recta paralela a esta, llamada **eje de simetría**.

Su concavidad está determinada por el coeficiente *a* de la función.

- Si $a > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba o convexa.
- Si $a < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo.



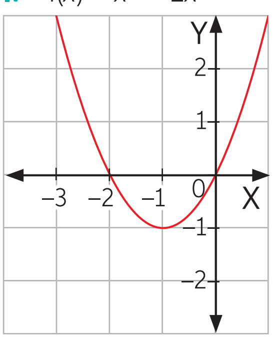
Por ejemplo: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

Identificamos el vértice (−2, −3) y el valor de a = 1. Cómo a > 0, la función es cóncava hacia arriba y el vértice corresponde al punto más bajo.

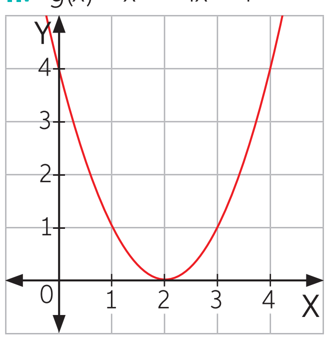
◆ ¿Fue acertada tu deducción en la actividad g? ¿Qué debes corregir?

3. Analiza las siguientes gráficas:

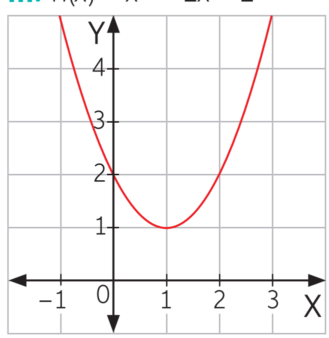
I. $f(x) = x^2 + 2x$



II. $g(x) = x^2 - 4x + 4$



III. $h(x) = x^2 - 2x + 2$



a. Construye una tabla para cada una de las funciones. Identifica al menos 4 puntos que pertenezcan a la función.

b. ¿En qué puntos intersecan el eje X?, ¿y el eje Y?

c. Reemplaza en las ecuaciones el valor $x = 0$ y obtén los puntos $(0, f(0))$, $(0, g(0))$ y $(0, h(0))$. ¿A qué corresponden gráficamente?

d. Obtén los discriminantes de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$. ¿Cómo se relacionan sus discriminantes con la cantidad de puntos en que las funciones intersecan el eje X?

El gráfico de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siempre interseca el eje Y en el punto $(0, c)$.

Además, al asociar una ecuación de segundo grado a una función cuadrática, las soluciones corresponden a los puntos en que la gráfica de la función interseca el eje X. Esto, dependiendo del valor del discriminante (Δ). Estas soluciones también se conocen como "raíces" o "ceros" de la función. Se observan tres casos al respecto:

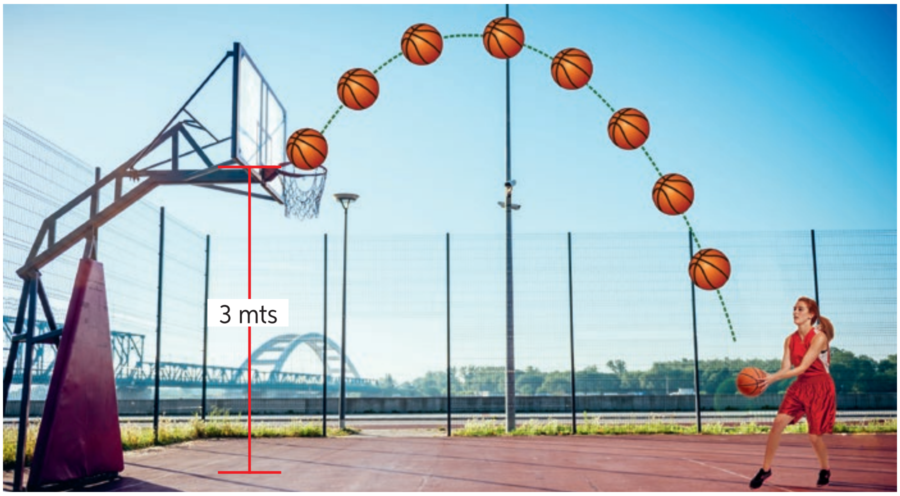
- $\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en $(x_1, 0)$.
- $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ y el gráfico de la función no interseca el eje X.

◆ ¿Fue acertada tu reflexión en las actividades c y d? ¿Qué debes corregir?

Física

4. La altura de una pelota que encesta en el aro de básquetbol es modelada por la ecuación:

$$h(t) = -10t^2 + 10t + 1{,}5; \text{ donde } t \text{ es el tiempo.}$$



a. Construye una tabla de valores y grafica los datos en un plano cartesiano.

Puedes ayudarte ingresando la función en GeoGebra u otro software.

b. ¿Cuál fue la mayor altura que alcanzó la pelota?

c. ¿En qué punto(s) interseca(n) la función en el eje X? ¿y en el eje Y?

d. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

e. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función?

f. ◆ ¿Qué ecuación es necesaria resolver para determinar el momento en que la pelota alcanza la altura del aro? Planteala y resuelve.

g. ◆ ¿Cuál de los dos resultados es adecuado para el contexto? ¿Por qué?

Las coordenada x del vértice V de una parábola cuya función es $f(x) = ax^2 + bx + c$ corresponde a las coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. De manera abreviada: $V(h, k)$, donde $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Su eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{a}$.

5. ◆ Identifica el tipo de concavidad, vértice, eje de simetría e intersección con los ejes. Luego, deduce y bosqueja su gráfica utilizando la información obtenida.

a. $f(x) = x^2$

b. $g(x) = -x^2 + 9$

c. $h(x) = 6x^2 - 4x - 8$

d. $p(x) = -(x + 1)^2 + 2$

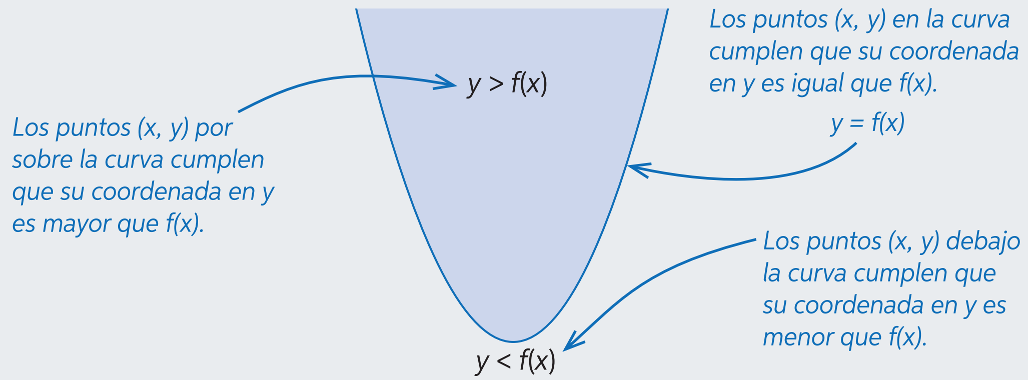
e. $q(x) = -2x^2 - 5x - 3$

f. $r(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{40}{9}$

Actividades de profundización

6. ◆ Analiza la siguiente información.

La parábola divide el plano en tres secciones, tal como lo muestra la imagen.



Por ejemplo, si reemplazamos la coordenada x del punto $(3, -3)$ en $f(x) = -2(x - 2)^2$, obtenemos que $f(3) = -2$, es decir, mayor que -3. Por lo tanto, $(3, -3)$ se encuentra bajo la curva.

Identifica dónde se encuentran los siguientes puntos con respecto a la función $f(x) = 2x^2 + x - 5$:

a. $(-1, -6)$

b. $(0, -5)$

c. $(-2, 1)$

d. $(1, 5)$

Para concluir

a. ◆ Considerando la función $f(x) = x^2 + x$, ¿qué representan gráficamente las soluciones de la ecuación $0 = x^2 + x$? ¿Y las soluciones de $2 = x^2 + x$?

b. ◆ A partir de la expresión algebraica que representa una función cuadrática, ¿qué información puedes obtener de la parábola asociada? Explica.

61 a 65

Variación de parámetros de una función cuadrática

Objetivo: Reconocer la forma canónica de una función cuadrática y la variación de parámetros.

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de una función cuadrática?
¿Cómo completarías el cuadrado de binomio de la expresión $ax^2 + bx$?

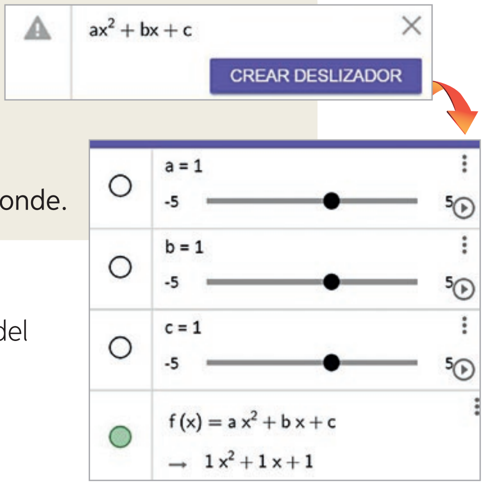
Para practicar.
gbit.cl/T21M2MP069A

1. ◆ Sigue los pasos para realizar la siguiente actividad en parejas. Puedes utilizar el recurso en el vínculo.

Paso 1: En GeoGebra, escribe la expresión "$ax^2 + bx + c$" y presiona enter.

Paso 2: Presiona los tres puntos del costado y en el menú desplegable selecciona en "puntos especiales".

Paso 3: Presiona el botón "animar" en el deslizador *a* y responde.



a. Describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

b. Planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola cuando $0 < |a| < 1$ y cuando $1 < |a|$.

Paso 4: Dejando fijo el valor de *a* en 1, anima el deslizador *b* y responde.

c. Describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

d. Planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola al variar el parámetro *b*. ¿Qué ocurre cuando $b = 0$? ¿Es fácil de describir?

Paso 5: Dejando fijo el valor de *b* en 1, anima el deslizador c y responde.

e. Describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

f. Planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola al variar el parámetro *c*.

Paso 6: Modifica el valor de $c = 0$. Luego, selecciona el vértice, activa el rastro y vuelve a animar el deslizador del coeficiente *b*.

g. ¿Cómo es el movimiento del vértice al variar el parámetro *b*? ¿Qué dificultades tiene su análisis? Explica con tus palabras.

Recuerda que las coordenadas del vértice son $\left(-\frac{b}{a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

2. ◆ Respondan en parejas: ¿En qué magnitud se desplaza el vértice de la parábola $w(x) = (x - 2)^2 + 3$ en cada eje? ¿En qué direcciones?

3. Grafica en tu cuaderno o utilizando un software en un mismo plano las siguientes funciones cuadráticas. Grafica como referencia $f(x) = x^2$ dentro del plano.

a. $g(x) = x^2 - 5$

b. $h(x) = x^2 + 3$

c. $i(x) = x^2 - 1$

d. $p(x) = (x + 3)^2$

e. $n(x) = (x - 5)^2$

f. $m(x) = (x - 1)^2$

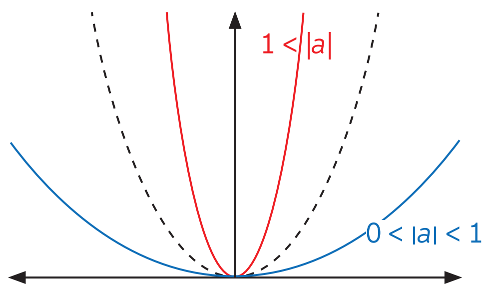
¡Utiliza colores para diferenciarlas!

g. ◆ ¿En qué casos la gráfica se desplaza hacia arriba y en qué casos lo hace hacia abajo? ¿A qué se debe?

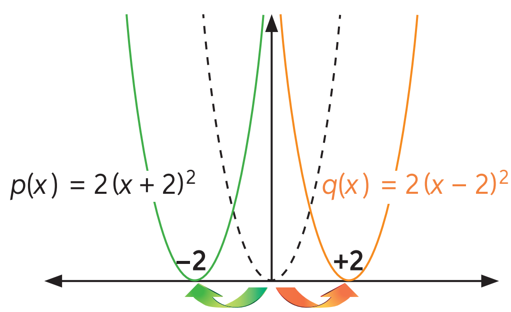
h. ◆ ¿En qué casos la gráfica se desplaza hacia la izquierda y en qué casos lo hace hacia la derecha? ¿A qué se debe?

Para analizar la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, transformaremos la ecuación en su forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

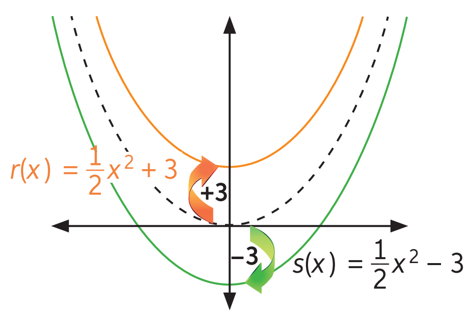
- Si $0 < |a| < 1$, la gráfica se dilata. Si $1 < |a|$, la gráfica se contrae.



- El movimiento en el eje X está asociado al parámetro h. Si $h > 0$, la gráfica se mueve hacia la derecha en h unidades. Para el caso $h < 0$, la gráfica se mueve hacia la izquierda en $|h|$ unidades.



- El movimiento en el eje Y está asociado al parámetro k. Si $k > 0$, la gráfica se mueve hacia arriba en k unidades. Si $k < 0$, la gráfica se mueve hacia abajo en $|k|$ unidades.



◆ ¿Fueron tus conclusiones acertadas? ¿En qué te benefició realizar las conclusiones de la actividad 2 en parejas? ¿Por qué?

4. Transforma a su forma canónica las siguientes ecuaciones cuadráticas e identifica su vértice. Guíate por el ejemplo.

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ Factorizamos a de $ax^2 + bx$:

$f(x) = 2(x^2 + 2x) - 3$ Completamos el cuadrado de $x^2 + \frac{b}{a}x$ para factorizar:

$f(x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 3 \rightarrow f(x) = 2((x^2 + 2x + 1) - 1) - 3$

$f(x) = 2(x+1)^2 - 2 - 3 \rightarrow f(x) = 2(x+1)^2 - 5$ El vértice es $(-1, -5)$

a. $g(x) = x^2 + 4x - 1$

b. $h(x) = x^2 - 6x - 2$

c. $i(x) = x^2 + 4x$

d. $i(x) = 2x^2 + 8x + 1$

e. $j(x) = 4x^2 + 4x + 4$

f. $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^2 - 2x$

5. Observa las gráficas de las funciones y determina los valores de h y k.

a. $f(x) = (x+h)^2 + 3$

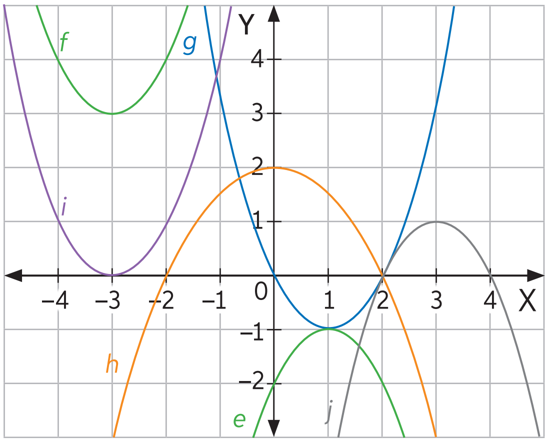
b. $g(x) = (x-1)^2 + k$

c. $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + k$

d. $i(x) = (x-h)^2$

e. $j(x) = -(x-3)^2 + k$

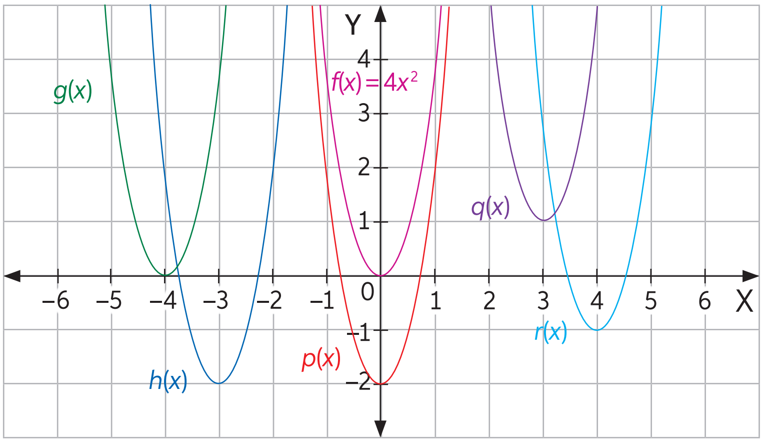
f. $e(x) = -(x-h)^2 + k$



6. Las siguientes funciones corresponden a traslaciones de la función $f(x) = 4x^2$.

a. Escribe cada función en su forma canónica.

b. Transforma las funciones a su forma general.



Para concluir

a. ◆ ¿En qué casos utilizarías la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ en vez de $f(x) = ax^2 + bx + c$? ¿Por qué?

b. ◆ ¿Cuáles fueron las ventajas de usar softwares o recursos digitales para analizar funciones?

66 a 69

Aplicaciones de la función cuadrática

¿Para qué sirve modelar una situación mediante una función? ¿Qué situaciones has modelado mediante la función cuadrática a lo largo de la lección? Nombra 3.

Objetivo: Modelar situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y las ciencias por medio de funciones cuadráticas.

Muchas situaciones cotidianas se pueden modelar mediante una función cuadrática. Por ejemplo, la altura de un cuerpo que cae respecto del tiempo, la ganancia obtenida según la cantidad de artículos vendidos, entre otras. Para modelar situaciones, considera los siguientes aspectos:

- Identificar lo que se pide responder.
- Identificar los datos que entrega la situación.
- Establecer estrategias o procedimientos para resolver el problema.
- Evaluar la pertinencia de los resultados obtenidos e interpretarlos de acuerdo con el contexto de la situación.

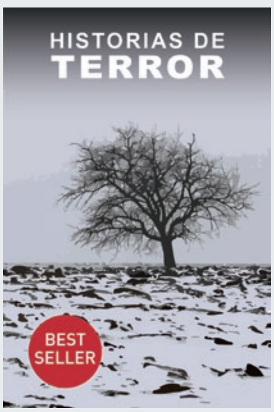
Una estrategia para resolver este tipo de situaciones es la de representar gráficamente el problema y analizar los puntos de la parábola. Por ejemplo: el vértice, la intersección con el eje X o el valor máximo o mínimo de la función.

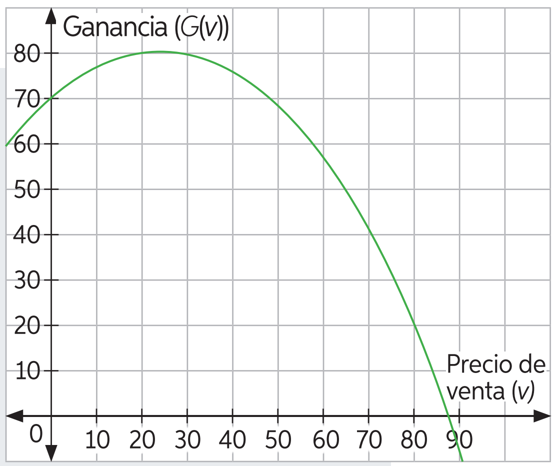
1. ◆ Analiza los siguientes procedimientos. Luego, realiza las actividades.

Se sabe que la demanda por el libro, es decir la cantidad de productos que serán vendidos, variará al aumentar su precio de venta, es decir la oferta, según la función:

$$G(v) = \frac{-1}{50}(v - 23)^2 + 80$$

Donde $G(v)$ corresponde a la ganancia en miles de dólares por los libros producidos y v al precio de venta en dólares.





a. ¿Qué puedes interpretar a partir de la gráfica?

b. Analiza el siguiente procedimiento y responde.

¿Cuánto será la ganancia si se vende a 1 dólar?

$G(1) = \frac{-1}{50}(1 - 23)^2 + 80$ Reemplazamos 1 en la expresión de la función

$G(1) = \frac{-1}{50}(-22)^2 + 80 = -\frac{484}{50} + 80 = 70{,}32$

¿Cómo se interpreta el resultado anterior?

c. Analiza el siguiente procedimiento y responde.

¿Cuál debe ser el precio de los libros para que la ganancia sea máxima?

A partir de la forma canónica, obtenemos las coordenadas:

$G(x) = \frac{-1}{50}(x - 23)^2 + 80$ El vértice de la parábola es (23, 80)

Interpreta el resultado anterior.

d. ¿Cuál es el valor del libro para que no exista ganancia?

◆ ¿De qué otra forma puedes obtener las coordenadas del vértice?

2. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Cuando un objeto se lanza verticalmente hacia arriba, la altura h en función del tiempo t está dada por la expresión $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0$. En ella, h_0 es la altura inicial, v_0 la velocidad inicial, t el tiempo transcurrido y g la aceleración de gravedad ($g \approx 10$ m/s^2).

Si se lanza una pelota desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s:

a. ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

c. ¿Cuánto tiempo se demora la pelota en regresar al suelo?

3. Las siguientes funciones modelan la altura (en metros) de los lanzamientos de dos basquetbolistas. Esto, en términos del tiempo transcurrido (en segundos) desde el lanzamiento.

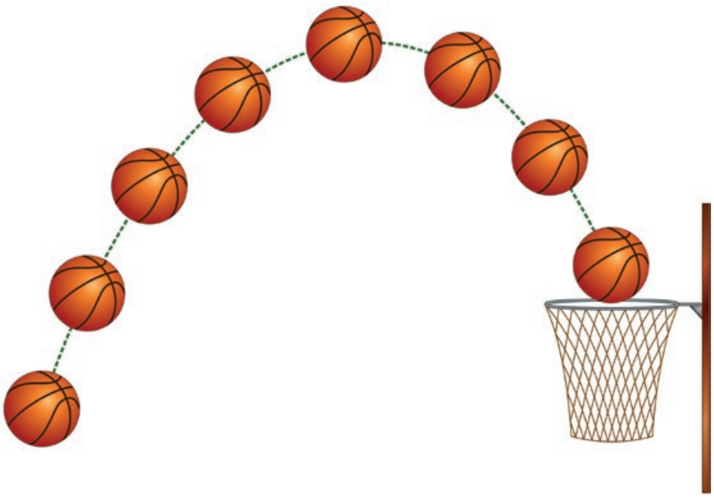
$$a(t) = -\frac{1}{3}(t - 2)^2 + 3 \qquad b(t) = -\frac{1}{3}(t - 1)^2 + 3$$

a. ¿Desde qué altura lanzan la pelota los basquetbolistas? Interpreta y discute con tu curso.

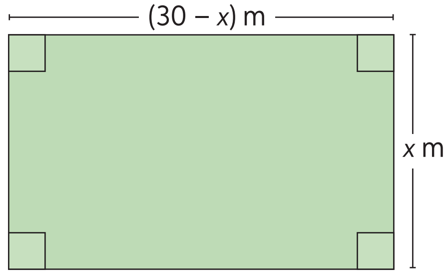
b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzan ambos lanzamientos? ¿En cuánto tiempo?

c. ¿En cuántos segundos los balones tocan el suelo?

d. ◆ Si el balón atraviesa la red a los $\frac{8}{3}$ m de altura, ¿cuántos segundos debió esperar cada jugador para encestar?



4. Laura tiene 60 m de malla que utilizará en su totalidad para construir un corral rectangular.



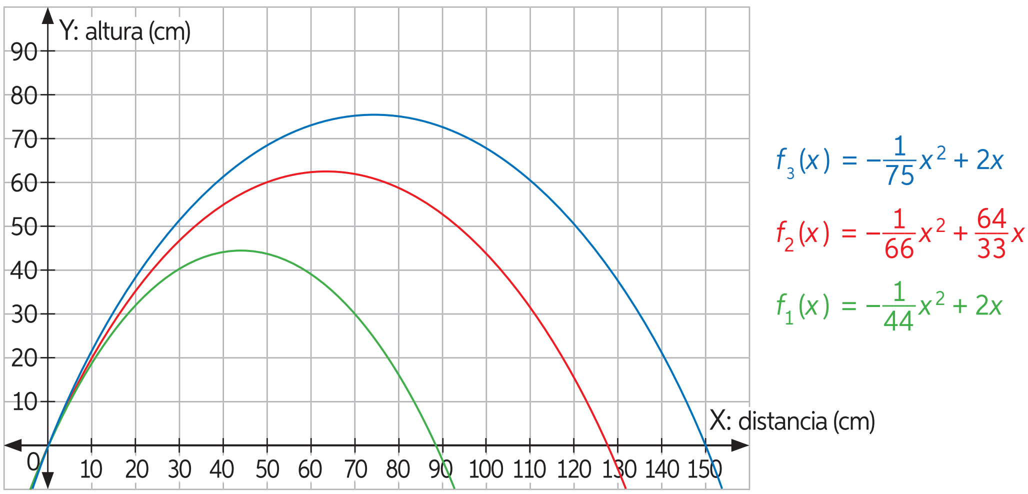
a. ¿Qué función determina el área del corral?

b. ◆ ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? Toma en cuenta el contexto.

c. ◆ ¿Cuál es el área máxima del corral?

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Las funciones modelan la altura (en cm) de tres chorros de agua en función de la distancia horizontal respecto al punto de lanzamiento (en cm).



a. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza cada uno? ¿A qué distancia horizontal del origen las alcanzan?

b. ¿Cuánta distancia cubre cada chorro de agua?

6. La ganancia mensual, en miles de pesos, de una mediana empresa que realiza instalaciones eléctricas es modelada por la función $G(x) = -x^2 + 240x - 8000$, donde x representa la cantidad de sistemas instalados.

a. Elabora el gráfico de $G(x)$.

b. ¿Cuál es la máxima ganancia mensual posible?

c. ◆ ¿Cómo se interpretan los valores 0 y negativos de la función $G(x)$?

7. La función cuadrática que modela la altura en metros de un delfín fuera del agua luego de x segundos es $f(x) = -5x^2 + 20x$. ¿Cuánto tiempo está el delfín fuera del agua?

Para concluir

a. Para modelar fenómenos asociados a funciones cuadráticas, ¿qué características de estas es necesario estudiar?

b. ¿En qué otras áreas puedes aplicar la función cuadrática para resolver problemas? Comparte tu respuesta con tu curso.

70 a 73

Antes de continuar

Cuadrado mágico

Un cuadrado mágico es una tabla en que la se dispone una serie de números. La particularidad de estos números es que su suma en columnas, filas y diagonales es siempre la misma. Dicho número es llamado el "número mágico del cuadrado".

En parejas, realizarán la siguiente actividad que consiste en resolver un cuadrado mágico de 4 x 4.

Para resolver el cuadrado mágico, deberán trabajar con las siguientes funciones.

- $f(x) = \frac{4}{7}x^2 - \frac{36}{7}x + \frac{32}{7}$
- $g(x) = 2x^2 - 5x + 8$
- $h(x) = \frac{-2x^2 - 8x + 10}{3}$
- $i(x) = -x^2 + 10x - 21$
- $j(x) = 3x^2 - 12x + 16$

PASO 1: Dibujen en sus cuadernos un cuadrado de 4 x 4. Rellénenlo según las instrucciones que se dan a continuación.

PASO 2: Calculen el número mágico del cuadrado.

PASO 3: Completen el cuadrado mágico con los valores que faltan.

Menor valor de $f(x)$		Opuesto del menor cero de $h(x)$	Abscisa del mayor cero de $f(x)$
	Máximo valor de $h(x)$		
Valor de $i(3)$		El valor de $2[g(0) - g(0,5)]$	
Abscisa del vértice de $j(x)$	Abscisa del menor cero de la función $i(x)$		Preimagen negativa de 31 en $j(x)$

a. Comparen su resultado con otra pareja.

b. En parejas y con ayuda de Internet, creen un cuadrado mágico de 3 x 3. Luego, intercámbienlo con otra pareja y resuelvan.

Reflexiono

a. Identifica los problemas que podrías tener al construir este material.

b. ¿Crees que este material te permitirá trabajar mejor las funciones?

c. ¿Con qué otro contenido se podrían utilizar cuadrados mágicos como actividad?

74 y 75

Lección
7 | Función inversa

Definición de la función inversa

¿Qué requisitos debe cumplir una función para serlo?
¿Qué es el codominio de una función? ¿Y la preimagen?

Objetivo: Reconocer y representar simbólica y pictóricamente la inversa de una función.

1. Una enfermedad muy contagiosa puede ser aliviada temporalmente por un fármaco. La efectividad de éste (en minutos) está modelado por la función $t(x) = \frac{x^2}{500}$. En ella, x son los mg de dosis inyectados tales que $0 \leq x \leq 500$.

a. ¿Cuál es el dominio de la función $t(x)$? ¿Qué representa?

b. ¿Cuál es el recorrido de la función $t(x)$? ¿Qué representa?

c. La siguiente tabla para determinar la duración del fármaco para distintas concentraciones. Complétala en tu cuaderno.

Gramos (mg)		15				200
Tiempo (min)	0,05		20,00	45,00	61,25	

Para llenar la tabla considera la resolución de la ecuación $\frac{x^2}{500} = 61,25$, por ejemplo.

d. ◆ Para operar a una de las personas infectadas, se inyecta al paciente con el fármaco. Por motivos de seguridad, es indispensable que este tenga una duración de al menos 8 horas. ¿Qué cantidad de dosis se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto 8 horas exactamente?

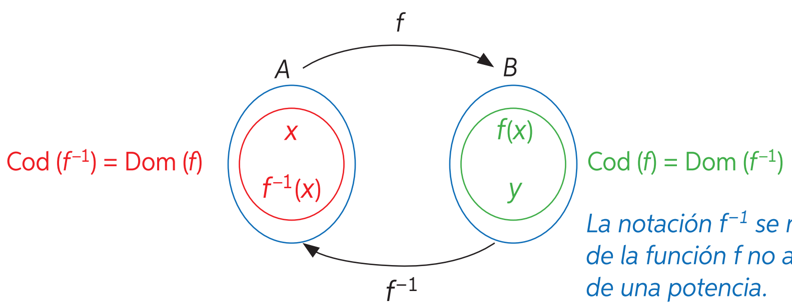
e. ◆ Para el periodo de observación postoperatorio, necesitan que el fármaco tenga una duración de 4 horas. ¿Qué cantidad deberá suministrarse para ello?

f. ◆ Se ha producido escasez del medicamento. Entonces, es necesario determinar una función que entregue la cantidad de milígramos necesarios en función de distintos tiempos en minutos. ¿De qué forma crees posible obtener esta función? Discutan en parejas y comenten con el curso.

Una función $f: A \longrightarrow B$ que cumple con:

- El conjunto B coincide con el conjunto de llegada de la función, o codominio.
- Cada elemento de A se relaciona con un único elemento distinto de B.

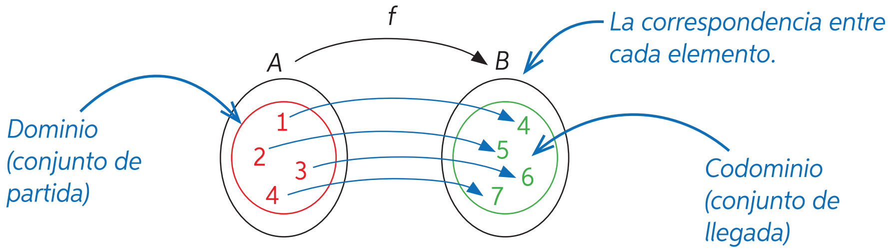
Posee función inversa y se denota por $f^{-1}(x)$, tal que $f^{-1}: B \longrightarrow A$.



La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f no al exponente -1 de una potencia.

2. Considera los diagramas sagitales de las funciones que aparecen a continuación, ¿Cuál(es) de ella(s) tiene(n) función inversa? Justifica tus respuestas y discute con tus compañeros.

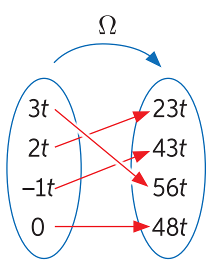
Ejemplo: Debemos tener presentes los elementos:



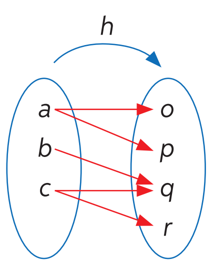
Establecemos las relaciones correspondientes a nuevo diagrama sagital, considerando que:

- $Dom(f) = Cod(f^{-1})$
- $Cod(f) = Dom(f^{-1})$
- La correspondencia entre cada elemento se mantiene.

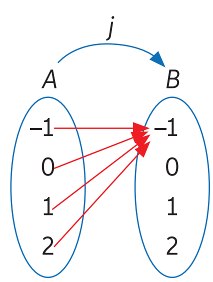
a.



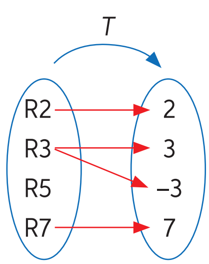
c.



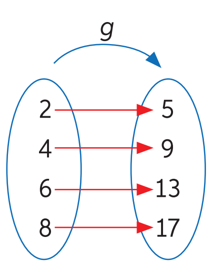
e.



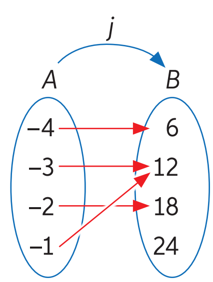
b.



d.



f.



3. Si $t(x)$ es una función tal que duplica y luego le suma una unidad a cada elemento del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a. Determina una expresión algebraica para $t(x)$.

b. Determina el recorrido de $t(x)$.

c. Realiza un diagrama sagital para $t(x)$.

d. Realiza un diagrama sagital para $t^{-1}(x)$.

e. Determina una expresión algebraica para $t^{-1}(x)$.

4. Se entrega la descripción en lenguaje natural de cada función. Determina la correspondiente descripción para la función inversa de cada una.

Descripción de f	Descripción de f^{-1}
Multiplica cada número por 3	Divide cada número en 3
Divide cada número por 2	
Aumenta cada número en una unidad	
Duplica cada número y luego le suma 4 unidades	
Agrega 3 unidades a cada número	

5. ◆ Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Si $f(3)=14$, se cumple que $f^{-1}(14) = 3$.

b. Siempre que g sea la inversa de f, f es la inversa de g.

c. El dominio de f es el dominio de la inversa de f.

d. Si $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$.

Actividades de profundización

6. ◆ Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

El funcionamiento de una máquina térmica se basa en la utilización de la energía en forma de calor (medida en Joules) representada por la variable x.

El siguiente esquema representa el funcionamiento de una máquina de Carnot. Esta es una máquina térmica ideal de máxima eficiencia. Funciona entre dos fuentes de calor X e Y: una a mayor temperatura (en rojo) y otra a menor temperatura (en azul).

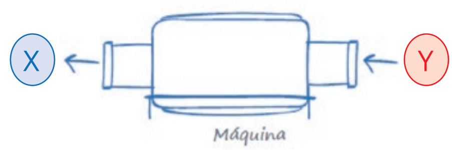
Función principal $f(x) = x + 3$

3 Joules de calor se transforman en energía mecánica.

El calor se transfiere de X a Y, lo cual genera energía mecánica.

Función inversa $f^{-1}(x)$

3 Joules de energía mecánica se utilizan para extraer calor.



Al aplicar energía mecánica a la máquina, se transfiere calor de Y a X.

a. Construye una tabla de valores de f para $x = \{1, 2, 3, 4\}$.

b. Determina una expresión algebraica para $f^{-1}(x)$.

c. Construye una tabla de valores de f^{-1} para $x = \{4, 5, 6 \text{ y } 7\}$.

d. ¿Cómo se relacionan ambas tablas de valores?

Para concluir

a. ¿Cuál es la función inversa de f^{-1}?

b. Explica con tus palabras qué es la función inversa de una función.

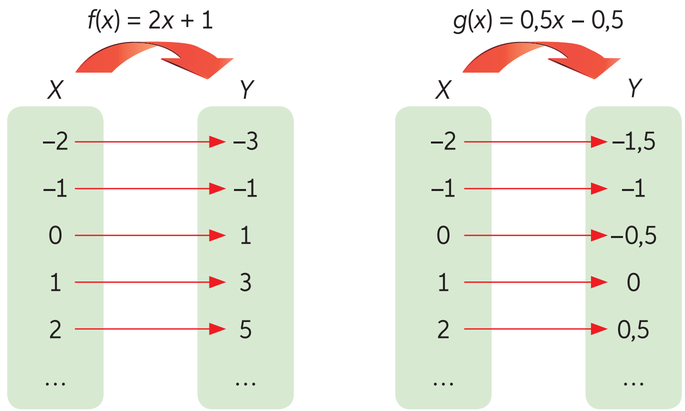
76 a 79

Representación de una función inversa

¿Qué significa que los puntos (x, y) pertenezcan a la función $f(x) = 3x$?
¿De qué formas puedes representar una función?

Objetivo: Representar gráficamente la inversa de una función.

1. Si $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, responde:



a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de cada función?

b. En tu cuaderno, completa la tabla considerando los valores dados.

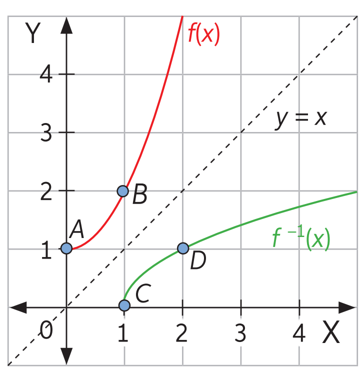
f(x)	
x	y
-3	-5
0	1
1	3
2	5

g(x)	
x	y
-5	
	0
3	
	2

c. Grafica en tu cuaderno ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

d. ◆ ¿Qué relación puedes establecer entre las funciones?

2. ◆ Analiza la gráfica de las funciones $f:\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow [1, \infty[$ y su inversa $f^{-1}: [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.



a. ¿Qué relación existe entre los puntos *A* y *C*? ¿Y entre *B* y *D*?

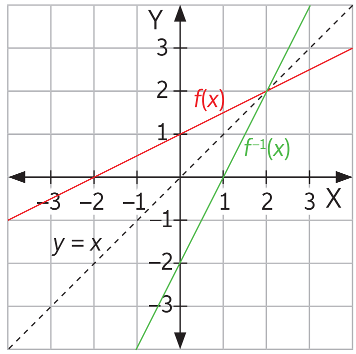
b. ¿Cómo se relacionan las reflexiones de los puntos de $f(x)$ con respecto a la recta $y = x$ y los puntos pertenecientes a la inversa?

c. Explica utilizando un diagrama sagital la siguiente afirmación: "Las coordenadas intercambian sus valores; si los puntos de $f(x)$ son (a, b), entonces los de la función inversa siempre serán (b, a) respectivamente".

◆ ¿Qué representación de *f* te ayudó a comprender la regularidad anterior?

Reflejar la gráfica de una función respecto de la recta $y = x$ permite obtener la gráfica de la función inversa. Por este motivo se dice que la función original es simétrica respecto de $y = x$, tal como se muestra en el gráfico.

En término de sus coordenadas, se intercambian sus valores. Si un punto (a, b) pertenece a f, entonces (b, a) pertenece a f^{-1}.



3. Considera los siguientes puntos de la función $t(x)$:

$(0, -2)$ $(1, -1)$ $(2, 2)$ $(3, 7)$

a. Realiza un diagrama sagital que represente t y t^{-1}.

b. ¿Cuáles son los puntos que pertenecen a la función t^{-1}?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP080A

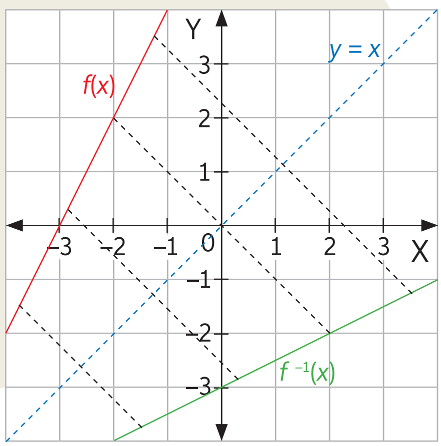
4. En tu cuaderno, realiza los siguientes pasos para determinar la inversa.

Puedes utilizar el recurso web para verificar los pasos.

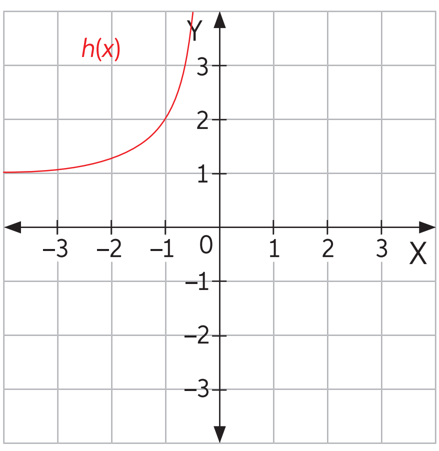
Paso 1: Grafica los puntos de la función y esboza la curva.

Paso 2: Grafica la recta $y = x$.

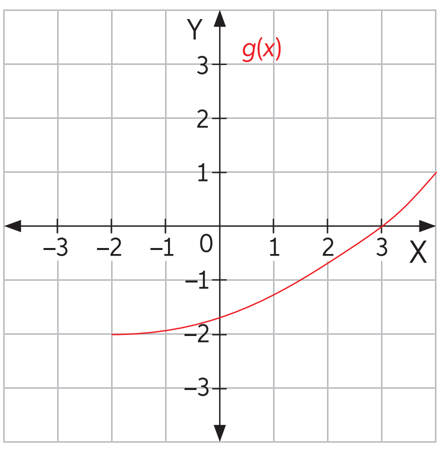
Paso 3: Refleja los puntos con respecto a la recta y esboza un gráfico de su inversa.



a.

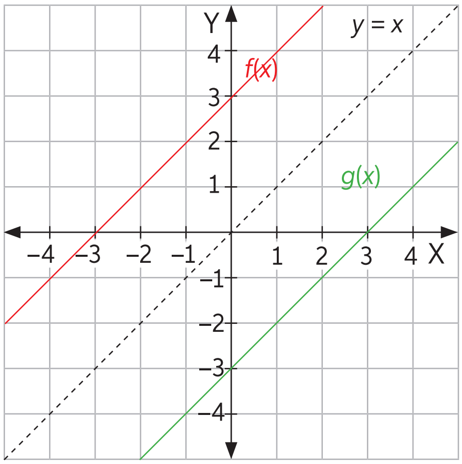


b.

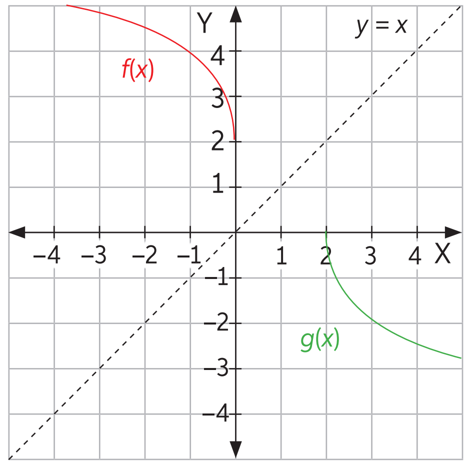


5. ◆ Evalúa si en cada gráfico se representa una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$. En el caso de que no lo sean, traza la gráfica de $f^{-1}(x)$ en tu cuaderno.

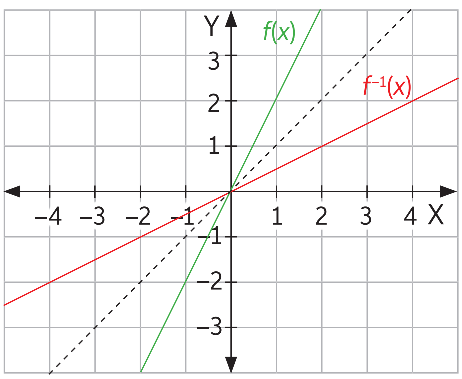
a.



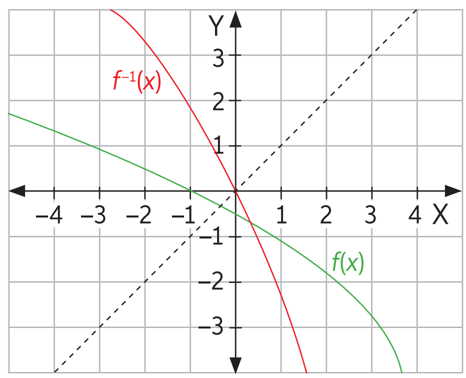
b.



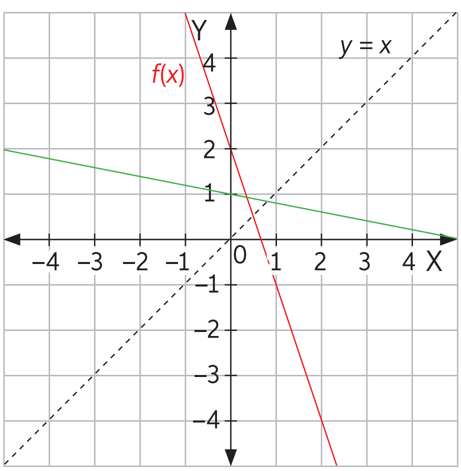
c.



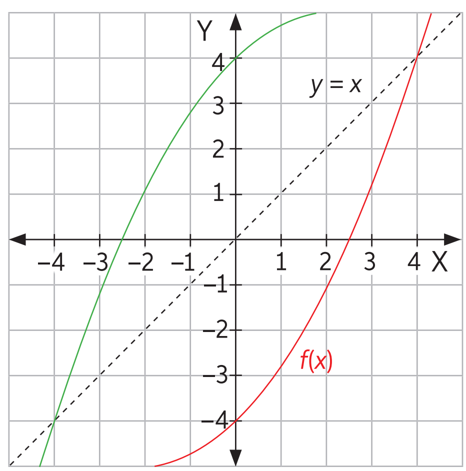
d.



e.



f.



6. ◆ Analiza las siguientes afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas.

a. La función inversa de una función f es simétrica con respecto al eje X.

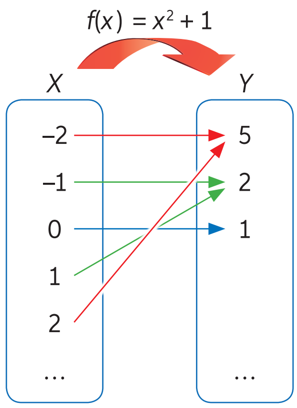
b. La inversa de la función inversa de una función es 1.

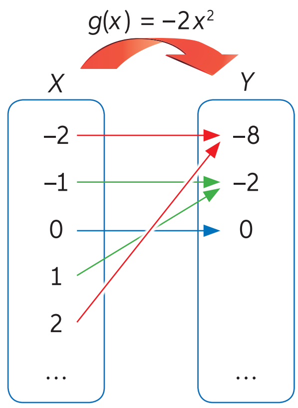
c. Si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.

d. Todas las funciones inversas son simétricas a la función original con respecto a la recta de ecuación $y = -x$.

e. Todas las funciones inversas son inversamente proporcionales a la función original.

7. ◆ Analiza las siguientes funciones de dominio real y responde.





a. Escribe como pares ordenados los elementos de cada diagrama de las funciones cuadráticas.

b. "A todos los elementos de *X* les corresponden elementos distintos del codominio *Y*". Para que exista la inversa de una función, ¿debe cumplir con dicha condición? Discutan en parejas. Argumenten utilizando los pares ordenados.

c. Si se modifica el dominio de *f* y *g* a $[0, \infty[$, ¿existen sus inversas? ¿Y si se modifica a $]-\infty, 0[$? Explica mediante pares ordenados.

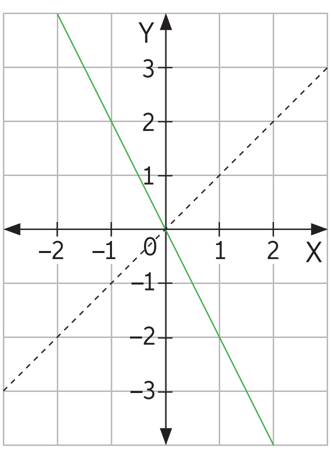
d. Explica mediante un diagrama sagital y pares ordenados el siguiente criterio para determinar la existencia de la inversa.

> "Para que la función inversa exista, es necesario que al trazar cualquier recta paralela al eje *X*, esta se interseque en a lo más un punto con la función".

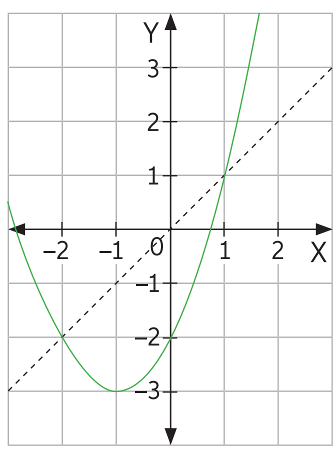
Actividades de profundización

8. ◆ Analiza la gráfica de las siguientes funciones. Argumenta si existen o no sus inversas.

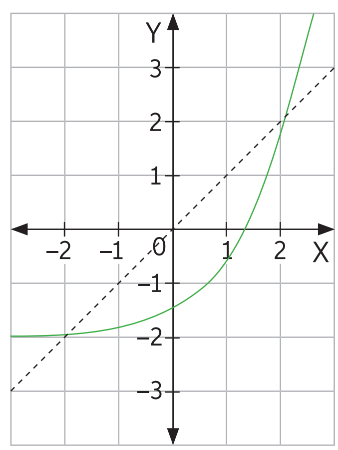
a.



b.



c.



Para concluir

a. ¿En qué representación de funciones te es más fácil distinguir si la inversa de una función existe? ¿Por qué?

b. ¿Se puede obtener la gráfica de una función a partir de la de su inversa? Justifica.

80 a 83

Función inversa de la función lineal y afín

¿Qué es una función lineal? ¿En qué se diferencia de una función afín?

Objetivo: Determinar la inversa de la función lineal y afín en diversas situaciones.

Ciencias Sociales

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

Se aumenta el precio de un producto por un 30 % y después se lo rebaja en el mismo porcentaje.

a. ◆ ¿Es el precio final el mismo que el original? ¿Cómo lo comprobarías?

b. Determina una función $f(x)$ que permita calcular el valor final de un artículo cuyo precio x aumentó en 30 %.

c. Determina una función $g(x)$ que permita calcular el valor final de un artículo cuyo precio x disminuye en 30 %.

Recuerda expresarlos como cambio porcentual.

d. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones anteriores?

e. ◆ ¿Es $g(x)$ la inversa de $f(x)$? Justifica.

f. Determina la función inversa de $f(x)$ y $g(x)$. Guíate por el siguiente procedimiento para determinar la inversa de $h(x) = 4x - 3$.

Paso 1: Reemplaza $h(x)$ por y: $y = 4x - 3$

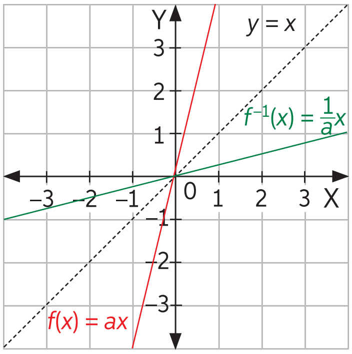
Paso 2: Despeja la variable x. $\dfrac{y+3}{4} = x$

Paso 3: Intercambia las variables x e y. $\dfrac{x+3}{4} = y \longrightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$

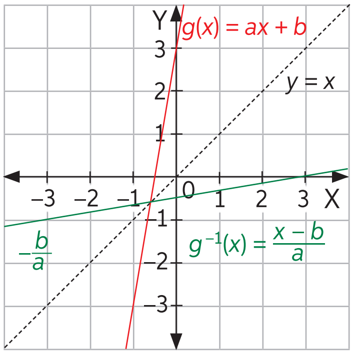
g. ◆ ¿Cuál es la expresión algebraica para la función inversa de $f(x)$?, ¿y de $g(x)$? ¿En qué porcentaje se debe rebajar el precio aumentado para que sea igual al original?

◆ ¿Qué significado tiene gráficamente realizar el cambio de variables entre x e y? ¿Cuál es la nueva variable independiente?

Para la función lineal $f(x) = ax$, su función inversa es la función lineal $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{a}$.



Para la función afín $g(x) = ax + b$, su inversa es la función afín $g^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.



2. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Descripción de f	Descripción de f^{-1}	Expresión algebraica de f	Expresión algebraica de f^{-1}
Multiplica cada número por 3	Divide cada número en 3	$f(x) = 3x$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$
Divide cada número en 2			
Aumenta cada número en una unidad			
		$f(x) = 2x + 4$	

◆ De las funciones anteriores, ¿cuáles son lineales o afines? Justifica.

3. Encuentra la expresión de la función inversa en cada caso. Luego, comprueba tus resultados graficando en GeoGebra o en tu cuaderno.

a. $f(x) = 2x - 5$

b. $h(x) = 3x$

c. $a(t) = 9t - 2t + 3$

d. $b(t) = 4t - 2$

4. ◆ Sean las funciones f, g y h, tales que cumplen con:

- f es la función inversa de g.
- h es la función inversa de f.
- $g(x) = 16x + 40$

Realiza un esquema para ilustrar la situación.

a. ¿Qué relación puedes establecer entre estas funciones?

b. Determina las expresiones algebraicas para f y h.

5. ◆ Analiza las afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas y justifica.

a. Si una función lineal o afín es creciente, entonces su función inversa será decreciente.

b. Si la pendiente de una función lineal es 5, entonces la pendiente de su función inversa será $\frac{1}{25}$.

c. El punto de intersección con el eje Y de una función afín es el mismo para su función inversa.

d. La función $f(x) = 5x + 10$ y la función $g(x) = 10x - 5$ son funciones inversas.

e. Una función lineal siempre se intersecará con su función inversa en el origen del plano cartesiano.

6. ◆ Considera $f(x) = 1$ para realizar la siguiente actividad:

a. Realiza un diagrama sagital y una gráfica de la función. ¿Corresponde a una función afín?

b. Describe con tus palabras el proceso que hace $f(x)$. ¿Existe el proceso inverso?

c. Refleja $f(x)$ respecto a la recta $y = x$ y describe el resultado. ¿Es función?

7. ◆ Determina los valores de p y q para las siguientes funciones y sus inversas.

a. $f(x) = 3x - 5$ y $f^{-1}(x) = px + q$

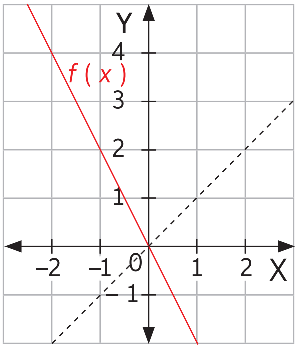
b. $g(x) = x - 3$ y $g^{-1}(x) = px - q$

c. $h(x) = px - 2$ y $h^{-1}(x) = 5x + \frac{q}{5}$

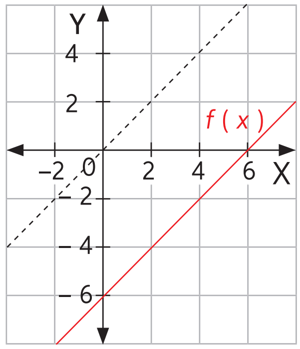
d. $i(x) = px + q$ y $i^{-1}(x) = \frac{3}{2} + 2x$

8. Establece la expresión algebraica de las siguientes funciones y luego su inversa.

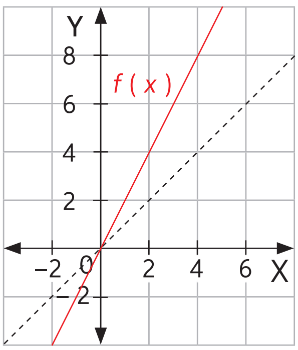
a.



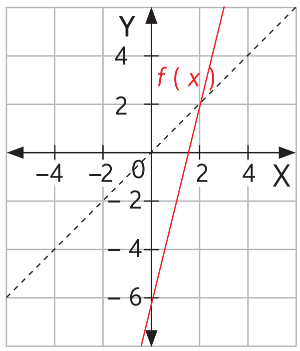
d.



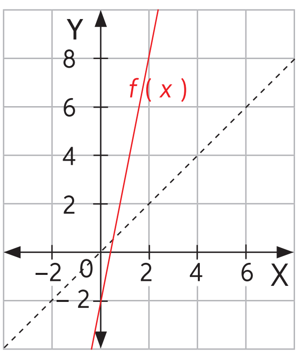
b.



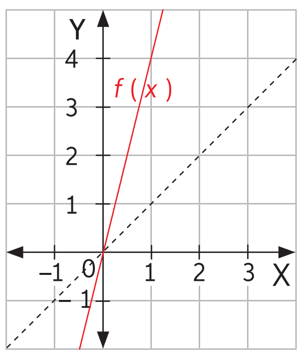
e.



c.



f.



9. Para arrendar una bicicleta se cobra una cuota básica de \$4000 más \$1000 por hora utilizada. Si x corresponde al número de horas de arriendo:

a. ¿Qué función f modela el cobro por el uso de la bicicleta en función de la cantidad de horas que se arrienda?

b. ◆ ¿Cuál es la función inversa de f? ¿Qué representa?

Ciencias naturales

10. ◆ Analiza la siguiente información y responde.

La temperatura es una magnitud que mide la cantidad de energía interna o calor que tiene un cuerpo. Cotidianamente se utilizan las escalas Celsius (°C) y Farenheit (°F), mientras que la escala Kelvin (K) es utilizada en disciplinas científicas.

La temperatura (teórica) mínima denominada “cero absoluto” corresponde al punto en que los átomos de un cuerpo se encuentran estáticos y es 0 K o −273,15°C.

La conversión de escalas de temperatura Celsius y Kelvin está dada por la función $c(x) = x - 273{,}15$. En ella, x corresponde a la temperatura en K y $c(x)$ en °C.

a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de $c(x)$?

b. Determina la función inversa de $c(x)$.

c. Utiliza la función inversa para calcular la equivalencia en escala Kelvin de:

−200°C   20°C   35°C   200°C

d. Las escalas Celsius (°C) y Farenheit (°F) están relacionadas por la función $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$. En ella, x corresponde a la temperatura en °C y $f(x)$ a la temperatura en °F. Determina la inversa de $f(x)$.

e. La novela *Fahrenheit 451,* de Ray Bradbury, tiene como subtítulo *La temperatura a la que el papel de los libros se inflama y arde*. ¿A qué temperatura en °C arde el papel?

f. ¿A qué temperatura en °C corresponden 100°F?

11. ◆ El Sistema Internacional de Unidades utiliza metros (m) como la unidad de distancia. Sin embargo, los países anglosajones utilizan pies y pulgadas como unidades para medir.

Sabiendo que 1 cm equivale a 0,3937 pulgadas y 1 pie es equivalente a 12 pulgadas:

a. Construye una función para transformar x metros a pies y otra para transformar x metros a pulgadas. Luego, determina sus inversas.

b. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones anteriores?

Para concluir

a. ¿Cómo puedes determinar la inversa de una función lineal?¿Y de una función afín?

b. ¿Qué estrategia para determinar la inversa de una función te resulta más fácil de realizar? ¿Por qué?

84 a 86

Función inversa de la función cuadrática

Si la función cuadrática convierte una variable en el cuadrado de ella, ¿cuál es el proceso inverso?

Objetivo: Determinar de forma gráfica y analítica la función inversa de una función cuadrática.

CIENCIAS NATURALES

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Mientras más largas sean las cadenas o las cuerdas de un columpio, mayor es su periodo, esto es, el tiempo que demora en volver a una posición.

En física, un columpio corresponde a un péndulo simple. La función que describe la relación entre el largo del péndulo *l* (en metros) y el periodo *T* (en segundos) es:

$$l(T) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Donde g corresponde a la aceleración de gravedad terrestre.

a. ¿Cuál es el coeficiente a de la función cuadrática?

Aproxima $\frac{g}{\pi^2} \approx 1$

b. ◆ Discutan en parejas: ¿qué valores podrían tomar el largo *l* y el periodo *T*?

c. ◆ La función representa la longitud *l*(*T*) que debe tener el péndulo según el periodo. ¿Cómo se interpreta su inversa *T*(*l*)?

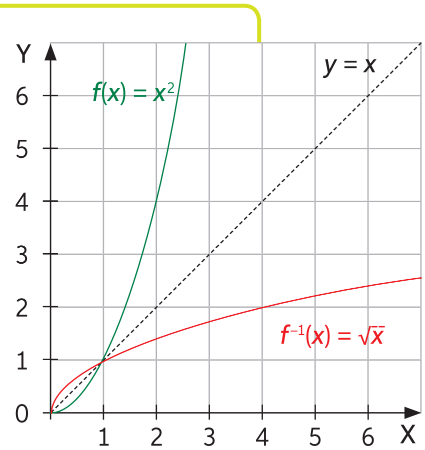
d. ◆ Un péndulo mide 1 metro. ¿Es correcto afirmar que su periodo puede ser −2 o 2 segundos? Justifica.

e. ◆ Determina su inversa de forma algebraica. Utiliza los mismos pasos para determinar la inversa algebraica de las funciones lineal y afín.

◆ ¿Cuál fue la importancia de restringir el dominio en el ejercicio anterior?

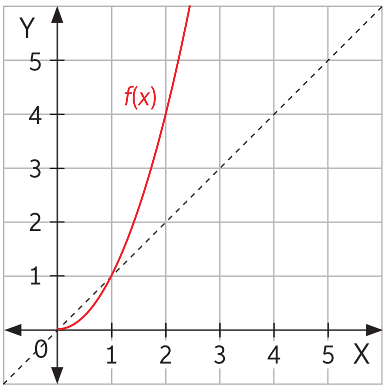
La función cuadrática $f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, no tiene función inversa. Esto, porque existen dos elementos del dominio que tienen la misma imagen (por ejemplo: $f(-1) = 1$ y $f(1) = 1$). Por lo tanto, no puede definirse la inversa porque para $f^{-1}(1)$ existen dos valores posibles. En ese caso, la inversa no es una función.

Acotando su dominio a los números reales positivos y el cero, se define la función $f(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$. Su función inversa es $f^{-1}(x): \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$, llamada función raíz cuadrada.



2. Considera la siguiente función cuadrática $f(x): \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



a. Considerando los valores anteriores, determina los pares ordenados que pertenecen a $f^{-1}(x)$.

b. Grafica en tu cuaderno $f(x)$ y la recta $y = x$.

c. Esboza el grafico de $f^{-1}(x)$.

d. Determina algebraicamente la función inversa. Guíate por los siguientes pasos.

Paso 1: Reemplaza $f(x)$ por y.

Paso 2: Despeja la variable x.

Paso 3: Intercambia las variables x e y.

3. Encuentra la expresión de la función inversa en cada caso. Luego, comprueba tus resultados graficando en GeoGebra. Considera $\mathbb{R}_0^+$ como dominio y recorrido de las funciones.

a. $f(x) = 6x^2$

b. $g(x) = \frac{5}{4}x^2$

c. $h(x) = \left(\frac{3}{5}x\right)^2$

d. $p(x) = 0{,}16x^2$

e. $q(x) = \sqrt{10x}$

f. $s(x) = 3\sqrt{2x}$

g. $r(x) = 2\sqrt{\frac{2}{5}x}$

h. $t(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}x}$

4. ◆ Analiza las afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas. Justifica considerando $\mathbb{R}_0^+$ como dominio y recorrido de todas funciones.

a. La gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la de su función inversa se intersecan en el punto (1, 1).

b. Al aumentar el valor de a en la función $f(x) = ax^2$, la gráfica de su función inversa estará más próxima al eje X.

c. Tanto la gráfica de $f(x) = x^2$ como la de su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ se encuentran en el primer cuadrante del plano cartesiano.

d. Si los puntos de una función raíz cuadrada son (a, b), entonces los puntos de su función inversa son (b^2, a^2).

e. La función inversa de $f(x) = 3x^2$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{3x}$.

5. Determina el valor de k para que $g(x)$ sea la función inversa de $f(x)$. Considera $\mathbb{R}_0^+$ como dominio y recorrido de ambas funciones

a. $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{k+2}}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2$ y $g(x) = (1-k)\sqrt{x}$

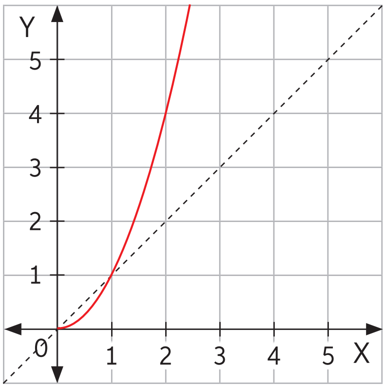
c. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{k}{k-1}x}$

d. $f(x) = 81x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{k}\sqrt{x}$

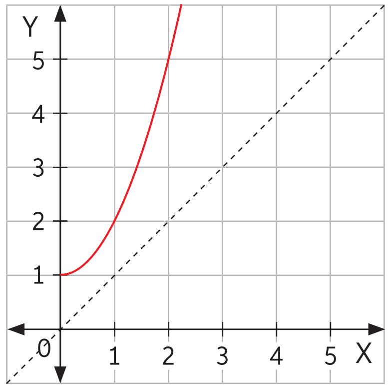
e. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ y $g(x) = (k-2)\sqrt{x}$

6. Establece la expresión algebraica de las siguientes funciones y luego su inversa.

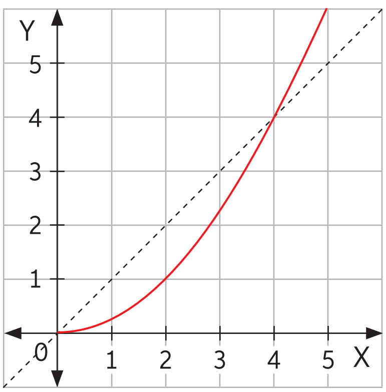
a.



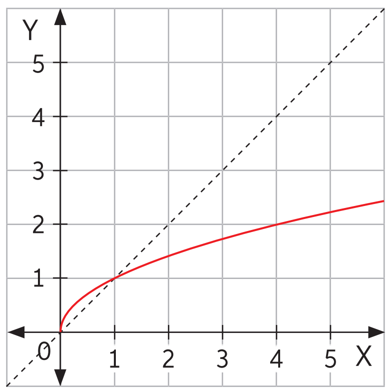
d.



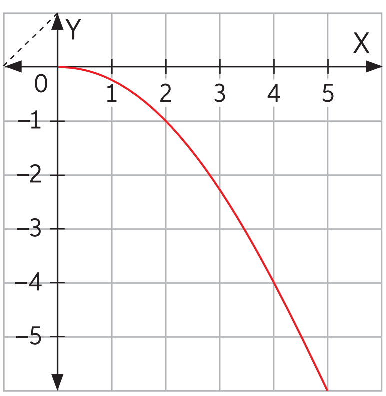
b.



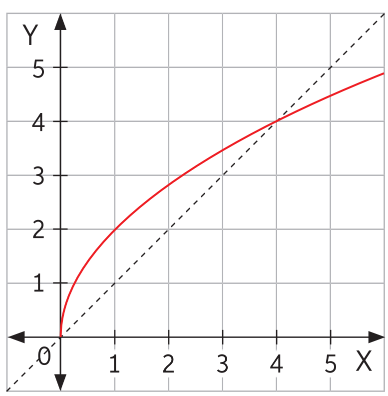
e.



c.



f.



7. Analiza las siguientes funciones. Determina, en cada caso, cuál de las funciones del gráfico corresponde a su función inversa.

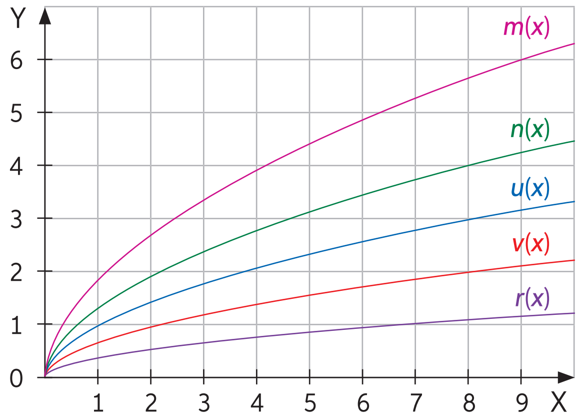
a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b. $g(x) = \frac{8}{9}x^2$

c. $h(x) = 2x^2$

d. $p(x) = 7x^2$

e. $q(x) = \frac{1}{2}x^2$



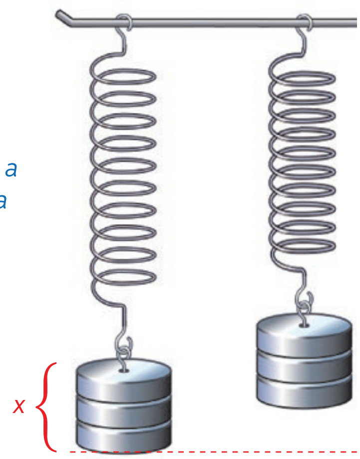
Física

8. La energía potencial elástica de cierto resorte está dada por la función $U(x) = 200x^2$. En ella, U es la energía medida en Joule y x el estiramiento del resorte medido en metros.

a. Determina la función inversa $x(U)$. ¿Cómo se interpreta?

b. Si la energía potencial elástica del resorte es de 8 Joule, ¿cuánto se habrá estirado?

La energía potencial elástica corresponde a la energía acumulada por un resorte cuando es estirado o comprimido.



Física

9. La distancia que recorre Eduardo en el maratón de Santiago está dada por la función $d(t) = 0{,}9\sqrt{t}$. En ella, d representa la distancia (en metros) recorrida y t es el tiempo transcurrido (en minutos) una vez iniciada la carrera. Eduardo está participando en la carrera de 5 kilómetros:

Recuerda que 60 segundos equivalen a 1 minuto.

a. Transcurridos 5 minutos, ¿cuánta distancia ha recorrido Eduardo?

b. Transcurridos 30 minutos, ¿cuánta distancia le falta a Eduardo por recorrer?

c. Determina la función que permite conocer el tiempo que tarda Eduardo en recorrer cierta distancia.

d. Cuando le falta un kilómetro por recorrer, ¿cuánto tiempo ha demorado?

e. ¿Cuánto tardará Eduardo en recorrer la mitad de la competencia?

f. ¿Cuánto se demorará en terminar la carrera?

Para concluir

a. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los procedimiento para determinar algebraicamente la inversa de una función afín y una cuadrática?

b. ¿Por qué fue necesario restringir el dominio de la función cuadrática?

87 a 89

Antes de continuar

Mensajes secretos

La criptografía es el estudio y la creación de "alfabetos secretos". Sus técnicas provienen de la Antigua Grecia y hoy tienen gran importancia en el área informática.

En las siguientes tablas se presentan tres alfabetos secretos. Cada uno corresponde a transformaciones del alfabeto anterior.

Materiales:
- Cartulina u hoja de bloc.
- Tijeras.
- Regla.

Letra	H	O	L	A
↓	↓	↓	↓	↓
α	8	15	?	?
↓	↓	↓	↓	↓
β	–5	2	?	?

$f:\alpha \longrightarrow \beta$ $\quad g:\beta \longrightarrow \sigma$

$f(\alpha) = \alpha - 13$ $\quad g(\beta) = \beta^2$

Letra		α		β		σ
A	⟶	1	⟶	–12	⟶	144
B	⟶	2	⟶	–11	⟶	121
C	⟶	3	⟶	–10	⟶	100
D	⟶	4	⟶	–9	⟶	81
E	⟶	5	⟶	–8	⟶	64
F	⟶	6	⟶	–7	⟶	49
G	⟶	7	⟶	–6	⟶	36
H	⟶	8	⟶	–5	⟶	25
I	⟶	9	⟶	–4	⟶	16
J	⟶	10	⟶	–3	⟶	9
K	⟶	11	⟶	–2	⟶	4
L	⟶	12	⟶	–1	⟶	1
M	⟶	13	⟶	0	⟶	0
N	⟶	14	⟶	1	⟶	1
O	⟶	15	⟶	2	⟶	4
P	⟶	16	⟶	3	⟶	9
Q	⟶	17	⟶	4	⟶	16
R	⟶	18	⟶	5	⟶	25
S	⟶	19	⟶	6	⟶	36
T	⟶	20	⟶	7	⟶	49
U	⟶	21	⟶	8	⟶	64
V	⟶	22	⟶	9	⟶	81
W	⟶	23	⟶	10	⟶	100
X	⟶	24	⟶	11	⟶	121
Y	⟶	25	⟶	12	⟶	144
Z	⟶	26	⟶	13	⟶	169

Paso 1: En parejas, completen la tabla anterior con los valores que corresponden.

a. ¿Cómo pudieron completar la tabla de arriba? Expliquen.

Paso 2: Construyan 6 tarjetas de 8 x 5 cm y divídanlas.

Paso 3: Escriban una palabra de al menos 6 letras por tarjeta. Al reverso, codifíquenla usando los alfabetos α, β y σ. Luego, intercámbienlas e intenten descifrarla sin ayuda.

b. ¿Qué estrategias utilizaron para descifrar las palabras intercambiadas?

c. ¿Qué ocurre cuando se trata de invertir un número distinto del 0 en el alfabeto σ? ¿Por qué sucede esto?

d. ¿Existen las funciones inversas de f y de g?

Paso 5: Utilizando lo discutido, creen su propio alfabeto secreto mediante una función invertible y repitan la actividad.

Reflexiono

a. ¿Qué tipo de preguntas te fue más difícil de responder? ¿Por qué?

b. ¿Cómo resultó el juego en parejas? ¿Por qué?

90 y 91

¿Qué aprendí?

Elsa posee una pequeña empresa de compra y venta de antigüedades. Ella se dedica a recolectar antigüedades en distintos lugares y reparar aquellos objetos dañados, para luego venderlos en su tienda. Su empresa se llama "El Rincón del Pasado" y tiene solo 6 empleados:

Sus sueldos mensuales son:

- Gerente de ventas: $1 000 000.
- Técnicos Calificados (2): $650 000 c/u.
- Empleados sin Calificación (3): $350 000 c/u.

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

1. Para el siguiente año, Elsa está estudiando la idea de aumentar en 5 % el sueldo de sus trabajadores.

a. Calcula cuánto dinero necesitará Elsa para pagar mensualmente ese aumento.

b. Si Elsa dispone de $ 2 000 000 al año para beneficios, ¿podrá darles este aumento? Justifica tu respuesta.

c. Imagina que el aumento dependa de factores externos (como el IPC), y que cada año deba aumentar en 1 %. ¿Cuánto dinero extra deberá tener cada año para pagar los sueldos de los 6 trabajadores?

d. En 2018 Elsa obtuvo una ganancia de $25 800 000 y en 2019, $24 500 000. ¿Cuál fue el cambio porcentual de su ganancia entre esos dos años? ¿Qué significado tiene este resultado?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado. Utiliza el material creado en clases para ayudarte:

a. $x^2 = 4x + 5$

b. $9x^2 + 7x = 0$

c. $x^2 = 9$

d. $-x^2 - 2x = 0$

e. $3x^2 + 36x + 81 = 0$

f. $\frac{121}{9}x^2 - \frac{81}{64} = 0$

g. $(-x+8)(3x-3)=0$

h. $20 - 2x^2 + 3x = 0$

i. $-25 = -x^2$

c. Halla los dos números tales que sumados dan 11 y multiplicados dan 24. Prueba más de 1 método para este problema.

4. Analiza las siguientes funciones cuadráticas. Encuentra lo solicitado en cada caso:

a. Una empresa determina que la cantidad de dinero que ganará este año en miles de dólares, está dada por la función $G(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$. En ella, x representa el dinero invertido en publicidad. ¿Cuánto debe invertir en este ítem para que la ganancia sea máxima? ¿Cuál es esa ganancia?

b. Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad v_0 en m/s. La altura $H(t)$ que alcanza (en metros) se determina en función del tiempo t (segundos transcurridos) con la función: $H(t) = -16t^2 + v_0 \cdot t$. Determina el valor de v_0 para que la altura máxima sea de 300 metros.

c. Desde un globo aerostático que va subiendo cae un objeto. La altura en metros del objeto (h) respecto del tiempo t está dada por: $h(t) = 80 - 4{,}9t^2$.

- ¿A qué altura se encontraba el objeto al momento de caer del globo?
- ¿Qué altura tendrá 4 segundos después de caer?
- ¿Qué distancia recorrió el objeto a los 2 segundos?
- ¿Cuánto se demora el objeto en llegar al suelo?

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de segundo grado:

a. El cateto mayor de un triángulo rectángulo mide el doble del menor aumentado en 6. Si su hipotenusa mide 39, ¿cuál es la medida del cateto menor?

b. El perímetro de un rectángulo mide 24 m y su área, 35 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

5. Determina si las siguientes funciones poseen función inversa. En caso afirmativo, calcula su inversa. En caso contrario, justifica.

a. $f(x) = 2x + 1$

b. $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

c. $h(x) = 2x^2 - 5$

d. $i(x) = 2 - 3x^2$

e. $j(x) = \sqrt{4x+4}$

f. $k(x) = x^2 + 2x - 35$

Reflexiono

- ¿Qué contenidos te resultaron más complicados en esta evaluación? ¿Cómo podrías mejorar?
- ¿Qué fortalezas tuviste durante el desarrollo de la Unidad? ¿Qué puedes mejorar?

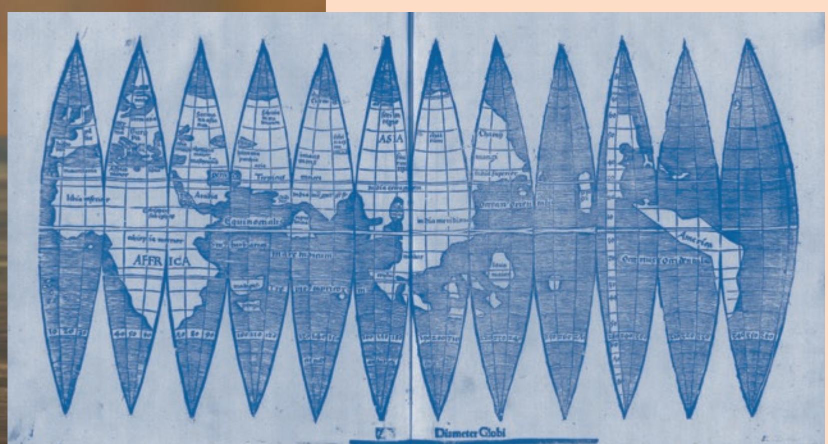
Unidad **3**

Geometría

En esta Unidad, aprenderás área de superficie y volumen de una esfera. Además, aprenderás sobre las razones trigonométricas y sus aplicaciones.

1. ¿Qué continentes identificas en los mapas? ¿Qué diferencias existen entre ellos?
2. ¿Por qué crees que Waldseemüller se vio en la necesidad de actualizar el mapa de Ptolomeo? ¿Qué descubrimientos fueron importantes para la época?

En una época en que mucha gente pensaba que la Tierra era plana, Colón estaba convencido de que esta tenía forma esférica. Por ello, se propuso navegar hasta la India dando la vuelta al mundo. Basado en los cálculos de Ptolomeo, presentó su idea a los Reyes Católicos y solicitó su apoyo para realizar ese viaje. Buscando nuevas rutas de comercio, desembarcó en tierras americanas el 12 de octubre de 1492.



El planisferio de Waldseemüller fue el primer mapa en incluir el continente de América, cuyo nombre se debe al explorador Américo Vespucio. Estaba compuesto de 12 hojas que, en conjunto, formaban un mural mapamundi.

3. ¿Qué cuerpo geométrico modelaba la Tierra según Ptolomeo? ¿Cómo se refleja en el de Waldseemüller?
4. ¿Qué elementos geométricos reconoces en el globo terráqueo recortable?
5. En el año 200 a.C, Eratóstenes calculó el radio de la Tierra con un error del 1 %. ¿Cómo crees que lo logró? Comenta con tu curso.

Activo lo que sé

1. Calcula lo solicitado en cada caso.

   a. El área de 2 círculos si el radio del menor mide 3 cm y el del mayor mide 3 veces ese valor.

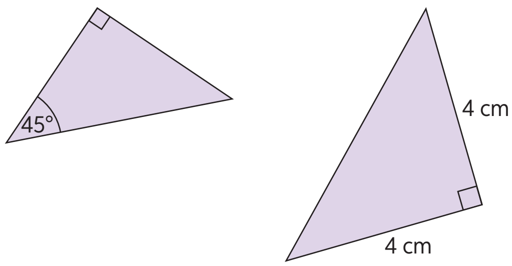
   b. La altura de un cilindro (sin considerar base ni tapa) cuya área superficial (o lateral) mide 200π cm^2. Además, el radio de su base mide 5 cm.

   c. El perímetro del sector circular correspondiente a cuatro novenos de un círculo de radio 9 cm.

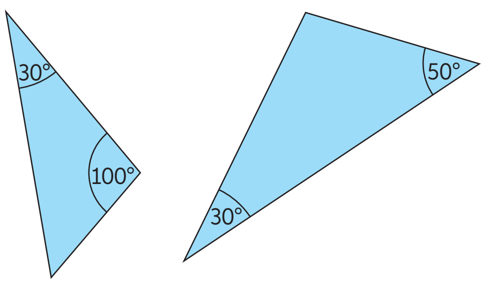
   d. El área de una semicircunferencia de radio 1 cm.

2. Determina si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes entre sí.

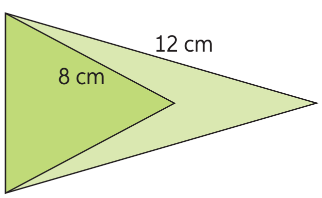
   a.



   b.

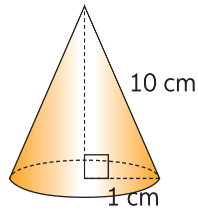


   c.



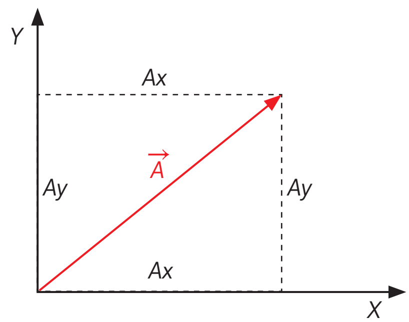
3. Resuelve los problemas.

   a. ¿Cuál es el área de la superficie del siguiente cono? Aproxima el resultado utilizando $\pi = 3$.



   b. El área basal de un cono es 25π cm^2 y su altura es 13 cm. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de igual base y altura?

   c. Observa la siguiente figura:



   Si el largo de la flecha roja es 10 unidades, ¿podrías determinar los valores de A_x y A_y?

4. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

   a. El radio de una circunferencia equivale al doble del diámetro.

   b. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar en una circunferencia.

   c. El volumen del cono es el triple del cilindro que tiene la misma base.

Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas?
- ¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad?
- ¿Crees que debes reforzar algún contenido? Si es así, ¿cuál?

Lección
8 Esfera

Definición de esfera

¿Qué elementos de tu vida cotidiana tienen forma esférica? ¿Cómo los describirías geométricamente?
¿Qué cuerpos geométricos se generan después de rotar figuras planas?

Objetivo: Identificar la esfera como un cuerpo generado por rotación y relacionarla con objetos cotidianos.

1. Observa las siguientes fotografías:



a. Identifica los objetos que tienen forma esférica o se asemejan a una esfera.
b. ¿Qué característica(s) tienen en común los objetos seleccionados? Explica.
c. ¿A qué cuerpos geométricos se asemejan las figuras que no seleccionaste?

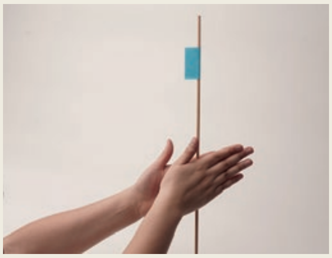
2. En parejas, realicen la siguiente actividad.

Materiales:
- Cartón, cartulina o papel.
- Varilla.
- Tijeras.

Paso 1: Corten una tira de papel o cartulina e inserten los extremos en un lápiz, como se ve en la fotografía, de modo que se forme un semicírculo.

Paso 2: Unan cada figura a una varilla.

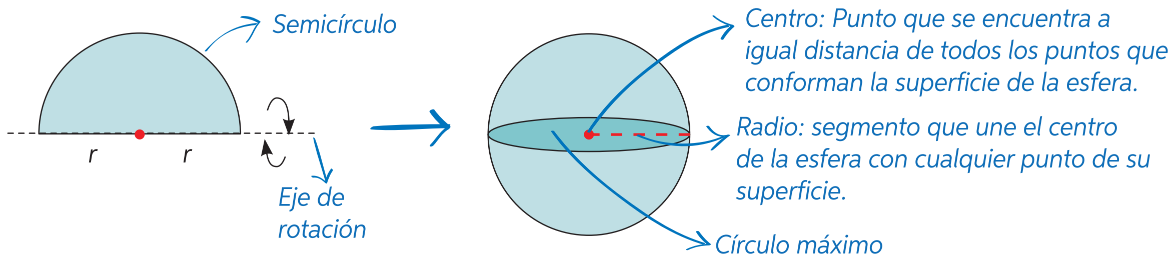
Paso 3: Roten la varilla de tal modo que las figuras giren en torno a esta, tal como se muestra en la imagen, y respondan.

a. ¿Qué figuras 3D observaron al rotar la varilla? Dibújenlas, completando la figura 2D que se utilizó.
b. ¿Cuál de las figuras anteriores corresponde a una esfera?, ¿qué la diferencia de las otras figuras 3D?

¿Qué rol asumió cada uno en esta actividad?, ¿de qué manera se organizaron para realizar cada paso?

La **esfera** es el cuerpo generado al girar un semicírculo en torno a su diámetro. Observa la figura a continuación:



También corresponde al lugar geométrico de todos los puntos del espacio cuya distancia es menor o igual que el valor del radio (r) de la esfera.

Una **semiesfera** es cada uno de los dos cuerpos que se obtienen al dividir una esfera en dos partes iguales.

El **círculo máximo** de una esfera corresponde a la base de su semiesfera. Es decir, el círculo máximo y la esfera tienen el mismo radio.

3. Resuelve los siguientes problemas.

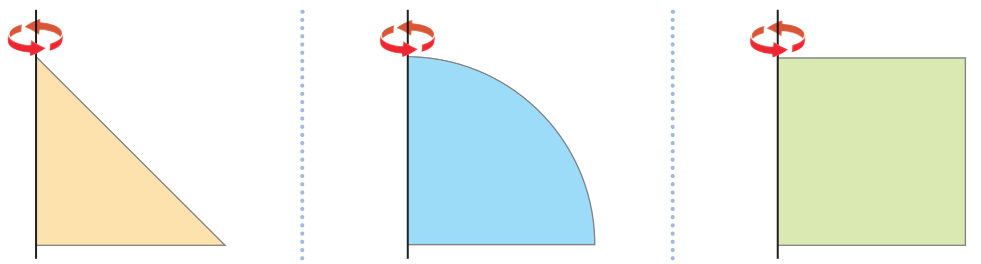
a. El radio del círculo máximo de una esfera mide 10 cm. ¿Cuánto mide su diámetro?

b. El diámetro de una esfera mide 14 cm. ¿Cuál es el área de su círculo máximo?

c. El área de un círculo máximo de una pelota de fútbol es 18π cm^2 ¿Cuánto mide el radio de la pelota?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP098A

4. ◆ Se rotan las siguientes figuras:



Triángulo rectángulo isósceles con base y altura 5 cm.	Cuarta parte de un círculo de radio 5 cm.	Cuadrado de lado 5 cm.

a. ¿Qué figuras 3D se generan después de rotar las figuras planas?

b. ¿Cuáles son los volúmenes de las figuras 3D generadas por el triángulo y el cuadrado?

c. ¿Se pueden comparar esos volúmenes que calculaste? ¿por qué?

Para concluir

a. Describe lo que entiendes por una esfera, cono y cilindro. Utiliza un objeto cotidiano e identifica en ellos sus componentes.

b. ¿Tienen un círculo máximo el cono y el cilindro? Comenta en parejas.

92 a 93

Volumen de la esfera

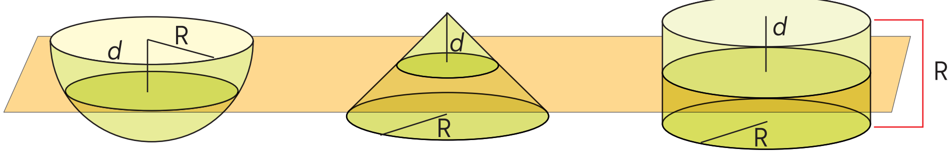
¿Cuál es el área de un círculo de radio *r*?
¿Cuál es la fórmula de volumen del cono y del cilindro de radio *r* y altura *h*?

Objetivo: Calcular el volumen de una esfera.

1. Analiza la siguiente información y realiza las actividades.

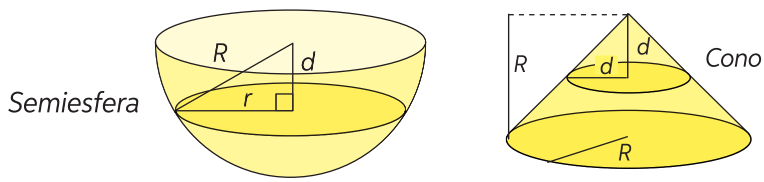
Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP099A

El matemático griego Arquímedes demostró que, al realizar secciones en cualquier altura intermedia de un cono, de una semiesfera y de un cilindro, todos de radio R, el área de la sección en la semiesfera es igual a la diferencia entre las áreas de las secciones en el cilindro y el cono. Para mostrar los anterior, observa el siguiente esquema:



De acuerdo con la imagen anterior, es posible establecer una relación entre las áreas de las secciones del cilindro, del cono y de la semiesfera:

Observa que $R^2 = r^2 + d^2$



El área de la sección en la semiesfera es:

$As_{semiesfera} = \pi \cdot r^2$

El área de la sección en el cono es:

$As_{cono} = \pi \cdot d^2$

Área de la sección en el cilindro (A_3) es:

$As_{cilindro} = \pi \cdot R^2$

$= \pi \cdot (r^2 + d^2) = \underbrace{\boxed{\pi \cdot r^2}}_{As_{semiesfera}} + \underbrace{\boxed{\pi \cdot d^2}}_{As_{cono}}$

Por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$As_{cilindro} = As_{semiesfera} + As_{cono} \rightarrow As_{semiesfera} = As_{cilindro} - As_{cono}$

Entonces, se cumple que el área de la sección en la semiesfera es igual a la diferencia entre las áreas de las secciones en el cilindro y el cono.

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP099B

a. Comprueba que se cumple la relación entre las áreas de las secciones para los valores de R = 5 cm, r = $\sqrt{21}$ cm y d = 2 cm. Para ello, guíate por el ejemplo para R = 5, r = 3 cm y d = 4 cm.

El área de la sección en el cono es:
$As_{cono} = \pi \cdot 16 = 16\pi\ cm^2$

El área de la sección en el cilindro es:
$As_{cilindro} = \pi \cdot 25 = 25\pi\ cm^2$

Por lo tanto, se obtiene:
$As_{semiesfera} = As_{cilindro} - As_{cono} = 25\pi - 16\pi = 9\pi\ cm^2$

b. ◆ ¿Qué podrías concluir al apilar todas las secciones de la esfera, cono y cilindro?

Entonces, apilando todas las secciones anteriores, podemos concluir que el volumen de una semiesfera de radio *r* es:

$$V_{Semiesfera} = V_{Cilindro} - V_{Cono}$$ Reemplazando: $$V_{Semiesfera} = \pi \cdot r^3 - \frac{\pi}{3} \cdot r^3$$

$$V_{Semiesfera} = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$$

Luego, el volumen (*V*) de una esfera es el doble de una semiesfera y está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

2. Calcula el volumen de las siguientes esferas:

Por ejemplo, si r = 3 cm:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (3)^3$

$V = 4 \cdot \pi \cdot (3)^2$

$V = 36 \cdot \pi\ cm^3$

$V \approx 113{,}04\ cm^3$

a. Su radio es:

- 1,5 cm
- $\sqrt[3]{4}$ cm
- 0,5 cm

b. Sus semiesferas tiene un volumen de:

- $0{,}1\ cm^3$
- $5\sqrt{2}\ cm^3$
- $\pi\ cm^3$

c. Su circunferencia máxima tiene diámetro 0,5 cm.

d. Está inscrita en un cubo de arista 10 cm.

e. Su diámetro coincide con la arista de un cubo de volumen 125 cm^3.

f. Calcula el radio de una esfera cuyo volumen mide 124 m^3.

3. Determina el radio con cada volumen dado.

a.

$V = 2{,}198 \cdot 10^{10}\ km^3$

b.

$V = 392{,}5\ cm^3$

c.

$V = 0{,}08\ m^3$

4. La *Géode* es un gigantesco cine con forma de esfera situado en París. Calcula su volumen.

El diámetro es 36 m

Utiliza π =3,14 para realizar una aproximación.

Astronomía

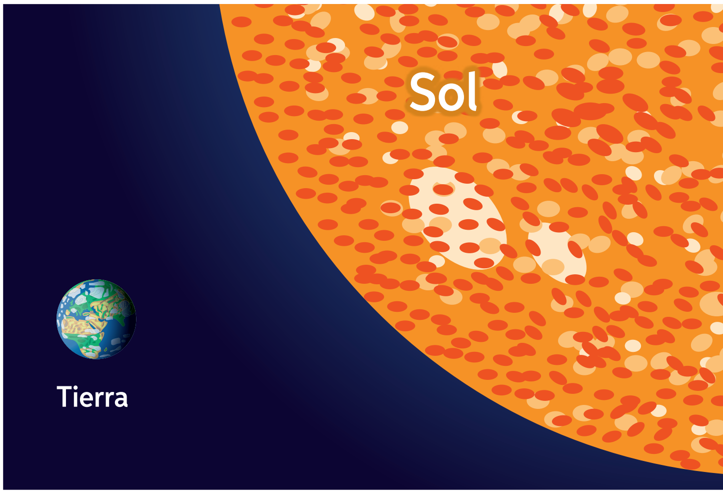
5. Los cuerpos celestes no son exactamente esferas, pero su forma puede ser aproximada a una.

   a. Calcula el volumen de cada uno según su radio aproximado:

Cuerpo celeste	Tierra	Sol
Radio (km)	6 371	696 340

   b. ¿Cuál es la razón entre los radios del Sol y la Tierra? ¿Y el volumen?

   c. ◆ ¿Cuántas Tierras son necesarias para rellenar un Sol? Aproxima el resultado.



6. La medida del radio de una esfera es la mitad de la del radio de otra esfera. ¿Cuál es la razón entre el volumen de la esfera mayor y la menor?

7. Una esfera se inscribe en un cubo de arista *n*. ¿Cuál es la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la esfera?

8. Se moldean cuatro objetos cilíndricos de arcilla, cuyo radio y altura miden ambos 9 cm.

   Luego, se decide construir con la misma arcilla tres esferas de radio 9 cm.

   a. ¿Alcanzara la arcilla disponible para construir las tres esferas? Justifica tu respuesta.

   b. ¿Cuántas esferas de diámetro 6 cm se podrían fabricar el material disponible?

9. Dos importantes construcciones del mundo tienen forma esférica: el Globo de Ericsson (Suecia) y el Centro Cultural Tijuana (México). ¿Cuál es el volumen de cada construcción? Escribe los resultados en función de π.

Construcción	Radio (m)
Globo de Ericsson	55
Centro Cultural Tijuana	13

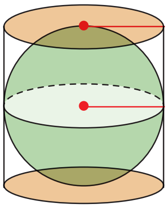
Centro cultural Tijuana, México.

10. Una esfera está inscrita en un cilindro de altura *h*, como se muestra en la figura.

   a. Calcula el volumen de la esfera.

   b. Calcula el volumen del cilindro.

   c. Entre el cilindro y la esfera



Para concluir

a. Si el diámetro de la esfera aumenta al quíntuple, ¿en cuánto aumenta su volumen?

b. Se tiene una esfera de radio 36 cm y un cono y un cilindro de radio basal y altura también de 36 cm. ¿Cuál es la razón entre el volumen de cada cuerpo?

94 a 97

Área de la superficie de la esfera

¿Qué es una red de construcción de cuerpos geométricos?
¿Qué es el área basal de una figura geométrica?

Objetivo: Calcular el área de la superficie de la esfera.

1. En parejas, realicen la siguiente actividad:

Materiales:
- Pomelo, naranja, mandarina o clementina, lo más esférica posible.
- Compás.
- Hojas en blanco.

Paso 1: Pongan la naranja sobre una hoja y dibujen su círculo máximo (lo más exacto posible). A continuación, copien cinco veces el círculo.

Paso 2: Pelen la naranja por completo y guarden la cáscara. Es parte importante del experimento.

Paso 3: Ubiquen los trozos de cáscara al interior de los círculos, como si se tratara de un rompecabezas. Traten de ser lo más exactos posible para que no quede ningún espacio. De ser necesario, córtenlos en trozos más pequeños.

Responde a partir de los resultados.

a. ¿Cuántos círculos se llenaron con las cáscaras?

b. Si el tamaño de la naranja hubiera sido otro, ¿la cantidad de círculos rellenos de cáscara hubiera variado? Justifica.

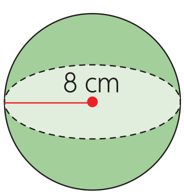
c. ◆ Compara tus resultados con tu curso. ¿Qué relación se puede establecer entre el área de la cáscara de la naranja y el área de su círculo máximo?

La fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera (A) corresponde a:

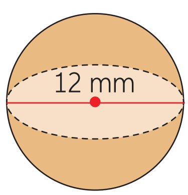
$$A = 4\pi r^2$$

2. Determina el área (A) de la superficie de cada esfera.

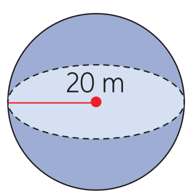
a.



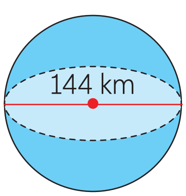
c.



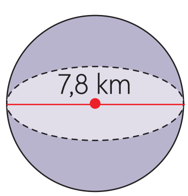
e.



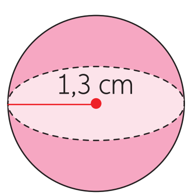
b.



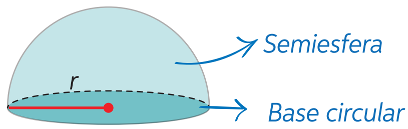
d.



f.



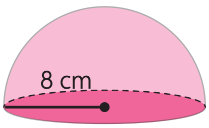
El siguiente cuerpo está formado por una semiesfera y una base circular. Para calcular el área total (A_t) de su superficie, se debe considerar que la base corresponde al círculo máximo de la semiesfera, es decir, la semiesfera y la base tienen el mismo radio:



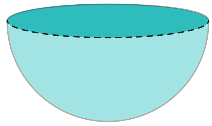
$$A_T = A_{semiesfera} + A_{base}$$

3. Calcula el área de cada semiesfera.

a.

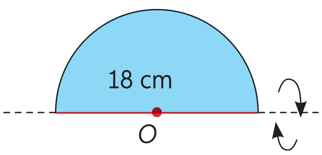


b. Base circular de área $20{,}25\pi$ cm^2.

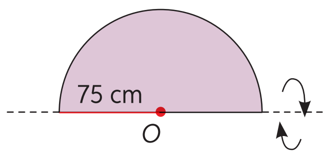


4. Calcula el área (A) de la esfera que se genera al girar cada semicírculo en torno al eje.

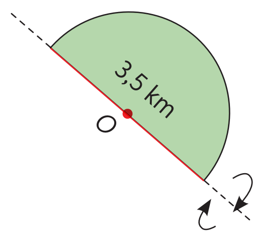
a.



b.

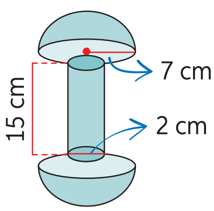


c.

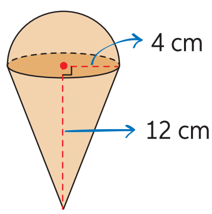


5. Las siguientes figuras se componen de cilindros, conos y semiesferas. Calcula el área de cada una de ellas.

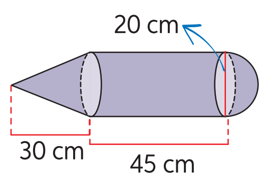
a.



b.



c.



6. Analiza cada afirmación. Luego, responde en tu cuaderno V o F según corresponda.

a. El área del círculo máximo de una esfera es siempre equivalente al cuádruple del área de su superficie.

b. Si una esfera M tiene radio 2r, y una esfera N, radio 4r, entonces el área de la superficie de la esfera M es la mitad que el área de la esfera N.

c. La superficie de una esfera se constituye de infinitas caras planas.

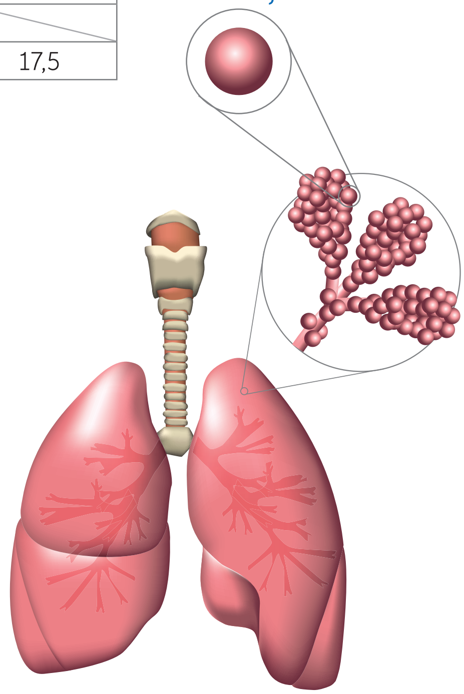
d. Si una esfera triplica su radio, el área de su superficie también se triplica de acuerdo con el área de la superficie inicial.

e. Si el área de una esfera aumenta al doble, el nuevo volumen de la esfera será el doble del volumen inicial.

7. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de valores:

Área de la superficie de la esfera (cm^2)	Área del círculo máximo (cm^2)	Radio (cm)
$324\ \pi$		
	$64\ \pi$	
$484\ \pi$		
		12
	$36\ \pi$	
		17,5

Los alveolos se asemejan a una esfera.



Medicina

8. Los pulmones adultos están compuestos por cerca de 400 000 000 alveolos. Estos se encargan de oxigenar la sangre y eliminar el dióxido de carbono. El diámetro de cada uno es aproximadamente 0,2 mm.

   a. Expresen la cantidad de alveolos en un pulmón y su radio en cm utilizando notación científica.

   b. ◆ ¿Cuál es el volumen aproximado de los alveolos? ¿Qué referencia podrías utilizar para caracterizar el volumen total? (1 litro = 0,001 m^3)

   c. ◆ ¿Cuál es la superficie total de los alveolos? ¿Qué referencia podrías utilizar para caracterizar su superficie total?

▶ ¿Cómo explicarías que objetos tan pequeños tengan un área tan grande?

Actividades de profundización

Arquitectura

9. En los domos geodésicos se utilizan triángulos isósceles para construir con una forma similar a una semiesfera. Se quiere determinar la cantidad de material necesario para cubrir el piso y las paredes de un domo. Este se asemeja a una semiesfera compuesta por 60 triángulos isósceles y su base es aproximadamente una circunferencia de radio 1 m.

   a. Si el domo fuera una semiesfera, ¿cuál sería su área?

   b. ¿Cuál es el área de cada triángulo?

   c. ◆ ¿Cuánto material estimarías necesario para construir el domo?

Para concluir

a. El área de una esfera aumenta al doble. ¿Qué sucede con el área de su círculo máximo?

b. Un observatorio tiene la forma de un cilindro con una semiesfera en su parte superior. ¿Por qué crees que se construyen con esa forma?

98 a 101

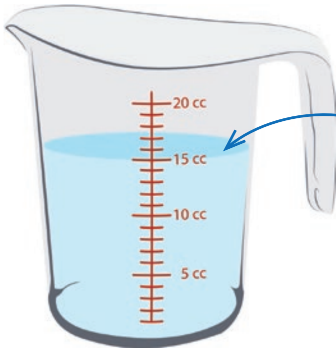
Confirmando el volumen de una esfera

Materiales:
- Jarro graduado para medir líquidos.
- Distintas esferas que quepan en el jarro y se hundan: bolitas, mandarina, ciruela, etc..
- Huincha de medir o regla.

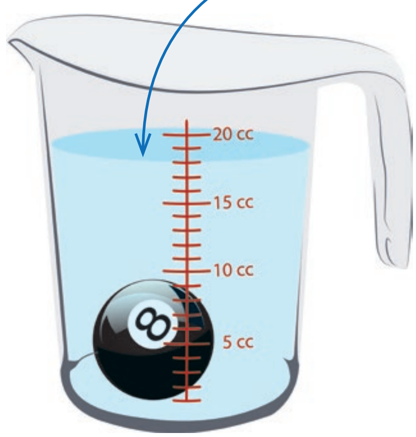
Para esta actividad trabajarán en grupos de 3 personas.

Paso 1: Seleccionen una esfera y midan su diámetro. Con ello, calculen su volumen (en cm^3).

Paso 2: En un jarro graduado coloquen agua. Cuiden que el jarro no se rebalse cuando sumerjan completamente la esfera que están utilizando.



El **principio de Arquímedes** permite medir volúmenes de forma muy sencilla: "Cuando sumerges un cuerpo en un líquido, el volumen del líquido desplazado (cuánto "sube" el líquido) es igual al volumen del objeto sumergido".



Paso 3: Sumerjan la esfera seleccionada, y registren cuánto subió el nivel del agua. Si es necesario, transformen las unidades para que sean las mismas que las del volumen calculado en el Paso 1.

Paso 4: Repitan el proceso con otras esferas.

a. ¿Cuál es la diferencia entre el valor medido en el paso 1 y el valor calculado en el paso 3? ¿A qué se debe? Argumenten.

b. Calculen el radio aproximado utilizando el volumen que obtuvieron en el paso 3. ¿Es mayor o menor la diferencia porcentual de la que se obtuvo al comparar volúmenes? ¿A qué se debe?

c. ¿A qué se debe que algunos cuerpos floten y otros no? Investiga.

Reflexiono

a. Mis compañeros, ¿participaron de manera proactiva, valorando el trabajo propio y del equipo?

b. ¿Tuvieron una actitud positiva en la búsqueda de soluciones?

102 y 103

Lección 9

Razones trigonométricas

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

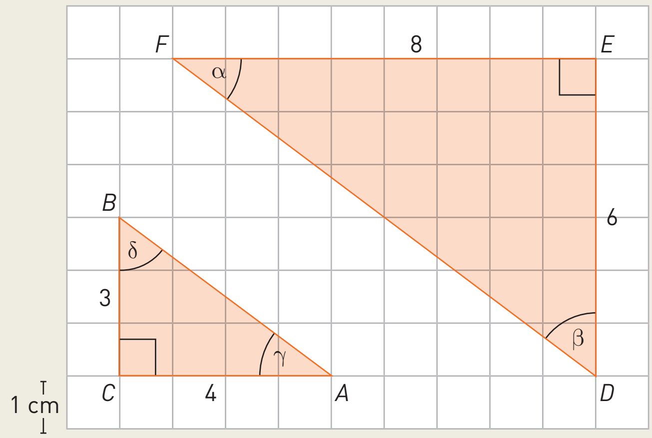
En un triángulo rectángulo, ¿cómo diferencias la hipotenusa de los catetos?
¿Todos los triángulos rectángulos son semejantes?, ¿por qué?

Objetivo: Comprender las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos.

1. Para esta actividad necesitarás una hoja de bloc, tijeras y una regla.

Paso 1: En la hoja de bloc dibuja dos triángulos rectángulos. El primero debe tener sus catetos de medida 6 y 8 cm. Los catetos del segundo triángulo deben medir 3 y 4 centímetros.

Paso 2: Recorta ambos triángulos y marca en ellos las medidas, tal como aparecen en la imagen.



Compara los triángulos superponiéndolos en diferentes posiciones. Luego, responde:

a. Calcula la medida de la hipotenusa de cada triángulo. Luego, comprueba con una regla.

b. ¿Podrías establecer que los triángulos construidos son semejantes?, ¿por qué?

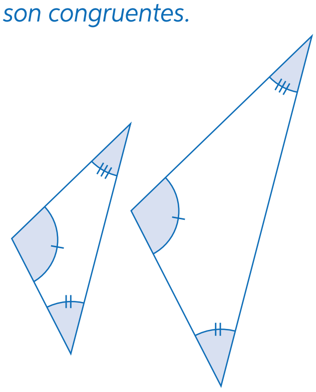
c. Calcula el valor de las siguientes razones:

- $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$
- $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$
- $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$
- $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{ED}}$

d. ¿Qué relación existe entre las razones anteriores?

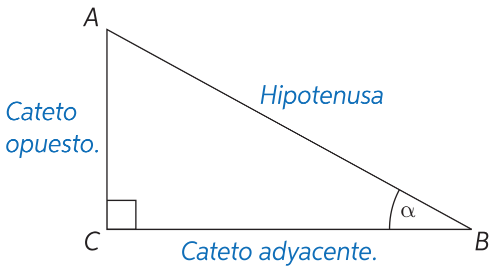
e. ◆ Si los lados del triángulo *ABC* se amplifican por 2, ¿qué sucede con los ángulos del triángulo? ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?

Recuerda: Criterio AA (ángulo-ángulo) dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos interiores son congruentes.



Por criterio de semejanza ángulo - ángulo, las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino de sus ángulos.

Considera que estas razones son siempre las mismas y que cada ángulo tiene un cateto adyacente y un cateto opuesto a él. Entonces, para α por ejemplo, se las puede definir de la siguiente manera:



Se lee	Se escribe	Se calcula	Ejemplo
Seno de α	$\text{sen}(\alpha)$	$\dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
Coseno de α	$\cos(\alpha)$	$\dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$
Tangente de α	$\text{tg}(\alpha)$ o $\tan(\alpha)$	$\dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

2. En los siguientes triángulos rectángulos, escribe el valor de cada razón trigonométrica.

Ejemplo: Consideramos el triángulo *ABC* y calculamos su hipotenusa:

$\overline{BC}^2 = (3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = 25\text{ cm}^2$

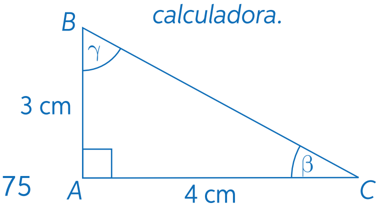
$\overline{BC} = 5\text{ cm}$

Luego, se calculan las razones trigonométricas.

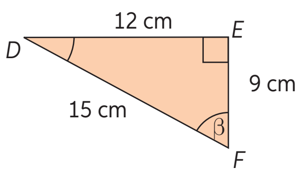
$\text{sen}(\beta) = \dfrac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6;\ \cos(\beta) = \dfrac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}8;\ \text{tg}(\beta) = \dfrac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}75$

$\text{sen}(\gamma) = \dfrac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}8;\ \cos(\gamma) = \dfrac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6;\ \text{tg}(\gamma) = \dfrac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 1{,}\overline{3}$

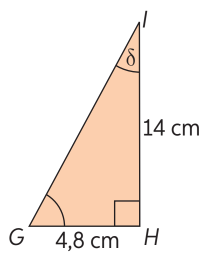
Utiliza calculadora.



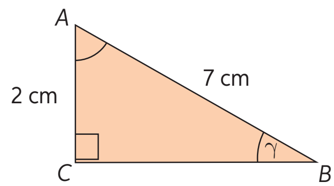
a.



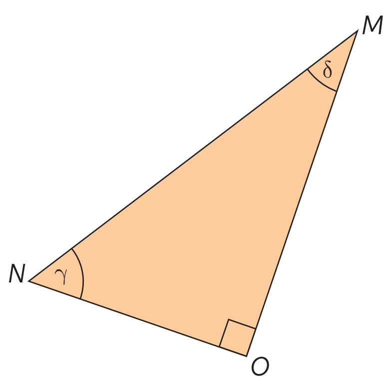
b.



c.



3. ◆ Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para el triángulo *MNO*. Justifica tus respuestas.



a. La expresión $\dfrac{\overline{ON}}{\overline{MN}}$ corresponde a $\text{sen}(\gamma)$.

b. La expresión $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{MN}}$ corresponde a $\cos(\delta)$.

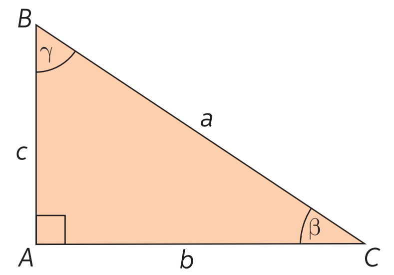
c. El valor de $\text{tg}(\delta)$ es $\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$.

d. $\cos(\gamma)$ es igual a $\text{sen}(\delta)$.

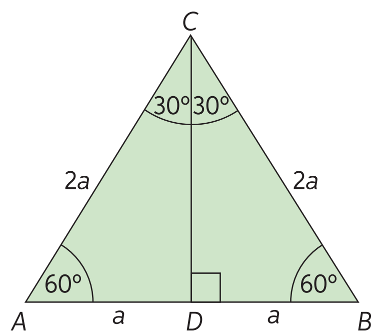
e. Si $\overline{OM}$ tiene mayor longitud que $\overline{ON}$, se tendrá que $\text{sen}(\gamma) > \text{sen}(\delta)$.

4. Considerando el siguiente triángulo, completa la tabla en tu cuaderno.

a	b	c	sen(γ)	sen(β)
$\sqrt{61}$		5		
	2	5		
		1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
	4			$\frac{1}{\sqrt{13}}$
	7	2		
$\sqrt{13}$		$\sqrt{15}$		



5. El triángulo *ABC* que se muestra en la figura es equilátero de lado 2*a* cm y $\overline{CD}$ es una altura.



a. Calcula la medida de $\overline{CD}$ utilizando el teorema de Pitágoras.

b. Escribe el valor de cada razón trigonométrica y completa la tabla en tu cuaderno.

Ángulo(α)	sen(α)	cos(α)	tan(α)
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°			

c. Supón que los lados del triángulo equilátero anterior miden 20 cm. ¿Cuáles son sus razones trigonométricas? ¿Y si los lados miden 30 cm?

d. ¿Qué conclusiones puedes obtener con respecto a las razones trigonométricas para ángulos de 30° y 60°?

6. Construye en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles de lado a con un ángulo de 45°. Utilízalo para determinar los valores de las razones trigonométricas sen(45°), cos(45°) y tan(45°).

◆ ¿Qué relación existe entre el seno y el coseno de 45°?, ¿por qué? Justifica.

7. Calcula los valores pedidos

Si sen(γ) = 0,8, ¿cuáles son los valores de cos(γ) y de tg(γ)?

Como sen(γ) = 0,8; seleccionamos dos valores de los lados que cumplan esa condición. Por ejemplo, el cateto opuesto puede valer 8 cm y la hipotenusa puede valer 10 cm. Luego, calculamos el valor del cateto faltante con los valores seleccionados:

$(8\text{ cm})^2 + \overline{CA}^2 = (10\text{ cm})^2 \rightarrow \overline{CA}^2 = 100\text{ cm}^2 - 64\text{ cm}^2 \rightarrow \overline{CA}^2 = 36\text{ cm}^2 \rightarrow \overline{CA} = 6\text{ cm}$

Finalmente, utilizamos los valores para calcular cos(γ) y de tg(γ):

$$\cos(\gamma) = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 0{,}6 \qquad y \qquad tg(\gamma) = \frac{8\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}3$$

a. Si sen(x) = 0,6; calcula cos(x).

b. Si cos(x) = $\frac{3}{5}$; calcula sen(x).

c. Si tg(x) = 6; calcula sen(x).

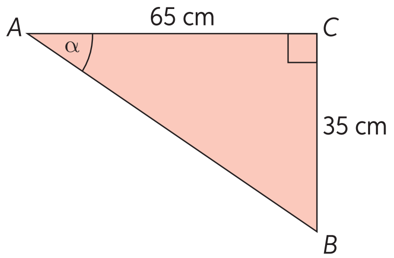
d. Si tg(x) = 0,5; calcula cos(x).

Utilizando el triángulo isósceles y el triángulo rectángulo puedes obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°. Así, gracias al teorema de Pitágoras y algunos simples cálculos, obtienes estos valores y no necesitas memorizarlos.

Ángulo	sen(α)	cos(α)	tan(α)
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Actividades de profundización

8. Responde considerando el triángulo rectángulo de la imagen:



a. ¿Cuál es el valor de tan(α)?

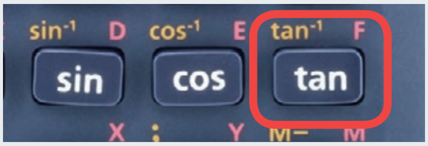
b. Con todo lo estudiado hasta el momento, ¿podrías calcular en valor de α? Justifica.

Para calcular el ángulo α teniendo el valor de su razón trigonométrica, debes aplicar la relación inversa. Por ejemplo:

$\tan(\alpha) = \frac{7}{13} \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{7}{13}\right) = \alpha \longrightarrow \alpha \approx 28,3°$

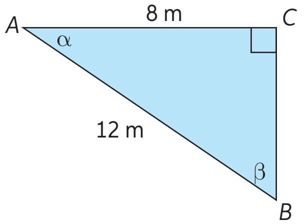
Para ello utilizamos en la calculadora la tecla shift seguida de la función correspondiente y la razón.

Recuerda configurar tu calculadora en grados sexagesimales.

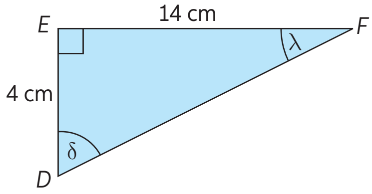


Con ayuda de la calculadora, calcula la medida aproximada de los ángulos interiores de cada triángulo.

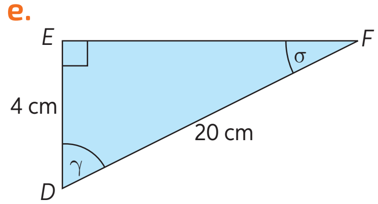
c.



d.



e.



Para concluir

a. Explica con tus palabras: ¿por qué se cumple sen(40°) = cos(50°) ? Justifica.

b. Si sen(β) = 0,342 y cos(β) = 0,94 , .¿qué valor tiene tg(β) ?

c. Si el coseno de un ángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuál es la medida de dicho ángulo? Explica tu procedimiento y compártelo con un compañero.

104 a 106

Aplicaciones de las razones trigonométricas

¿Qué es un problema de aplicación? ¿Qué rol tiene el modelado en matemática?
¿Es importante resolver problemas aplicados en matemática? ¿Por qué?

Objetivos: Resolver problemas aplicando las razones trigonométricas.

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

Según la normativa chilena, la razón entre la altura que alcanza una rampa y la distancia horizontal de esta debe ser como máximo 0,12.

En un edificio se quiere construir una rampa para subir el desnivel de la entrada cuya altura es de 30 cm. ¿Cuál debe ser la longitud de la base de dicha rampa?

Paso 1: Identifica los datos que se entregan en el problema y lo que debes encontrar.

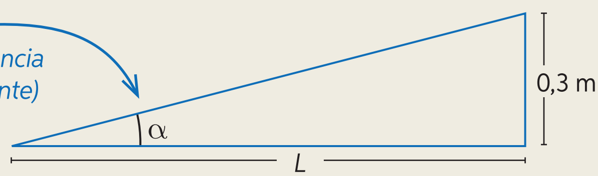
Los datos del problema son: *Altura: 30 cm*
Razón entre altura y distancia horizontal: 0,12

a. ¿Cuál es el dato faltante para construir la rampa? ¿Cómo se relaciona con los datos entregados en el problema?

Paso 2: Representa la situación a través de un dibujo.

Dibujamos un esquema para ilustrar la situación y anotamos las medidas:

La razón entre la altura (cateto opuesto) y la distancia horizontal (cateto adyacente) es 0,12.



b. ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura y la distancia horizontal?

Paso 3: Aplica el teorema de Pitágoras y/o las razones trigonométricas.

Planteamos la ecuación: $tg(\alpha) = \frac{0,3}{L} \rightarrow 0,12 = \frac{0,3}{L}$

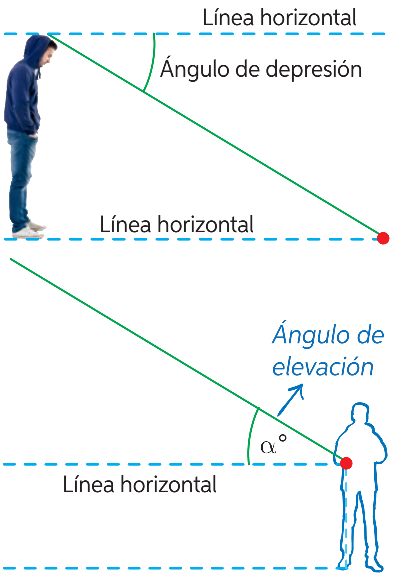
c. Calcula el resultado de la ecuación anterior.

Paso 4: Responde la pregunta del problema y verifica tu respuesta.

d. Plantea la respuesta. No olvides utilizar las unidades correspondientes.

¿Cuál crees que es la importancia de que las rampas cumplan con estas condiciones? ¿Por qué crees que no puede ser mayor el ángulo?

Utilizaremos el término ángulo de elevación o depresión para hacer referencia al ángulo que forma la línea de visión del objeto y la horizontal.



Las razones trigonométricas, junto con el teorema de Pitágoras, nos permiten resolver problemas que involucran triángulos rectángulos.

Para resolver puedes guiarte por los siguientes pasos:

Paso 1: Identifica los datos que se entregan en el problema y lo que debes encontrar.

Paso 2: Representa la situación a través de un dibujo.

Paso 3: Aplica el teorema de Pitágoras y/o las razones trigonométricas.

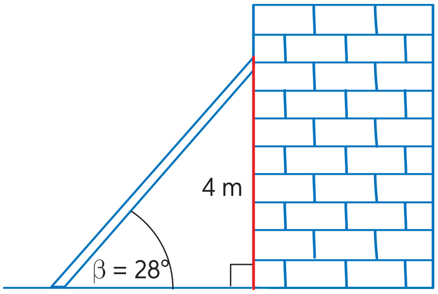
Paso 4: Responde la pregunta del problema y verifica tu respuesta.

2. Una viga apoyada en un muro forma un ángulo de 28° con la horizontal. El punto donde la viga toca en la pared está a 4 m de altura. Se necesita conocer el largo de la viga y la distancia entre el extremo inferior de la viga y el muro.

   a. ¿Qué datos entrega el problema? ¿Cuáles se desconocen?

   b. ¿Cuál es el largo de la viga?

   c. ¿Cuál es la distancia entre el extremo inferior de la viga y el muro?

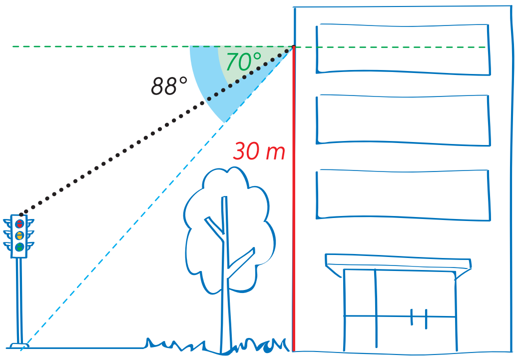


3. Dos objetos separados por 20 m se encuentran en la misma dirección respecto de la base de una torre. El más cercano a ella está a 17,5 m. ¿Cuáles son los ángulos de depresión desde la torre si esta mide 10 m?

4. Una escalera de 3 m de longitud está apoyada en una pared de tal forma que su extremo inferior está a 1,5 m de la misma. Luego, el extremo superior de la escalera se desliza hacia abajo 1 m. ¿En cuántos grados disminuye el ángulo que forma con el suelo?

5. Se observa un semáforo desde la ventana de un edificio, a 30 m del suelo. El ángulo de depresión para observar la parte superior del semáforo es de 70°, mientras que el ángulo de depresión para observar su base mide 88°.

   ¿Cuál es la altura del semáforo?



6. Desde la parte superior de un acantilado, se observa un barco y un submarino que están en el mar. Los ángulos de depresión son de 45° y 60° respectivamente. Ambos objetos están separados por una distancia de 110 m. ¿Cuál es la altura del acantilado?

7. En parejas, construyan la siguiente herramienta. Luego, realicen la actividad.

Construcción

Paso 1: Unan con cinta adhesiva la bombilla al transportador de manera que quede alineada en la parte recta (es decir, a los 0 y 180 grados).

Paso 2: Aten un peso (como una tuerca o una tapa de lápiz) al hilo y luego el otro extremo al centro del transportador. Dejen unos 10 cm de largo para que se pueda mover y se pueda medir el ángulo.

Materiales:
- Transportador
- Tuerca (o cualquier objeto con masa)
- Objeto cilíndrico que sirva como visor (puede ser el cuerpo de un lápiz pasta o una bombilla)
- Hilo (o lana delgada).

Instrucciones de uso

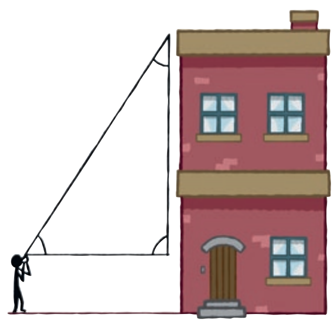
Con este artefacto, pueden determinar el ángulo de elevación de una torre o algún edificio. Para ello, deben mirar por la bombilla el extremo superior del edificio y observar la posición de la cuerda.

a. ¿Qué ángulo es el que mide el instrumento dentro del esquema? ¿Cómo se relaciona con el ángulo de elevación?

b. En parejas, elijan un objeto dentro del colegio y midan su ángulo de elevación.

c. Midan la distancia hasta el objeto. Utilicen pasos de ser necesario.

d. Calculen la altura del objeto escogido.



e. Comparen la medida obtenida con la de sus compañeros. ¿Son similares? ¿A qué se debe esto?

f. Si es posible, averigüen la altura real del objeto. Luego, determinen el error entre los valores. ¿Quién tuvo el menor error? ¿Por qué sucedió esto?

Para concluir

a. ¿Qué otra aplicación útil pueden tener las razones trigonométricas?

b. ¿Qué ventajas tiene utilizar herramientas tecnológicas en el cálculo de razones trigonométricas? Comenta con tu curso.

107 a 110

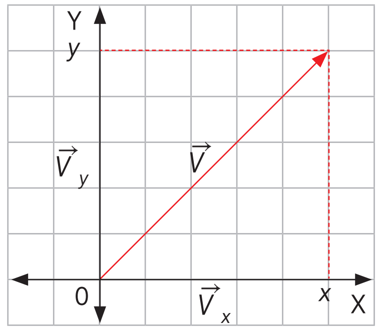
Vectores y trigonometría

¿Qué es un vector? ¿Cuáles son sus componentes?
¿En qué se diferencian un punto en el plano cartesiano de un vector?
¿Cuáles son los cuadrantes de un plano cartesiano?

Objetivo: Representar vectores en el plano e identificar sus elementos utilizando razones trigonométricas.

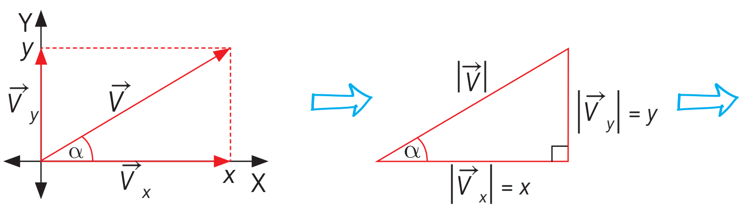
Los vectores $\vec{V}_x = (x, 0)$ y $\vec{V}_y = (0, y)$ corresponden a proyecciones del vector $\vec{V} = (x, y)$ sobre los ejes X e Y respectivamente. De esta forma, se tiene que:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = (x, 0) + (0, y)$$



Donde x e y corresponden a las **componentes** del vector $\vec{V}$.

Un vector $\vec{V}$ se puede descomponer utilizando sus proyecciones sobre los ejes del sistema coordenado. Para ello, se pueden utilizar las razones trigonométricas del ángulo que forma con el eje X:



$$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cdot \cos(\alpha) = x$$

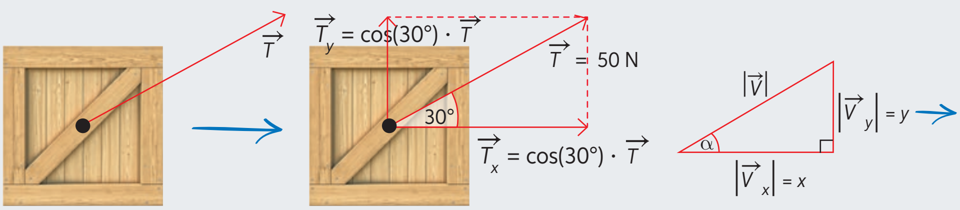
$$|\vec{V}_y| = |\vec{V}| \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = y$$

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_x|^2 + |\vec{V}_y|^2$$

1. ◆ Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Una cuerda amarrada a una caja genera sobre esta una fuerza de tensión $\vec{T}$ de 50 N con un ángulo de inclinación respecto al plano horizontal es de 30°. ¿Cuánto mide la componente horizontal y vertical de dicho $\vec{T}$?

Para resolver, descomponemos el problema en dos tensiones, $\vec{T}_x$ (tensión horizontal) y $\vec{T}_y$ (tensión vertical) utilizando razones trigonométricas:



$$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cdot \cos(\alpha) = x$$

$$|\vec{V}_y| = |\vec{V}| \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = y$$

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_x|^2 + |\vec{V}_y|^2$$

a. Observa el triángulo rectángulo que se forma con las tensiones presentes en la caja. Explica las razones trigonométricas permiten calcular los módulos de $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$.

b. Reemplaza los valores y calcula el módulo de cada vector.

c. Explica con tus palabras: ¿Por qué se cumple $\vec{T}_x^{\,2} + \vec{T}_y^{\,2} = \vec{T}^{\,2}$?

El módulo es un número que corresponde a la magnitud de un vector.

◆ ¿Cuál es la diferencia entre módulo y vector? Investiga y comenta con tus compañeros.

2. Considera los vectores $\vec{A} = (3, 4)$, $\vec{B} = (4, 3)$, $\vec{C} = (2, 1)$ y $\vec{D} = (4, 2)$.

   a. Grafica los vectores en un plano cartesiano.

   b. ◆ ¿Qué relación puedes establecer entre los ángulos que los vectores forman con el eje X? Justifica tu respuesta y discute con tus compañeros.

   c. Calcula $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ y $|\vec{D}|$. ¿Qué relación estableces entre ellos?

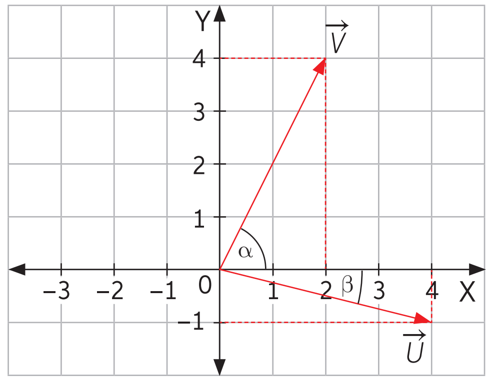
3. Dado los vectores de la imagen.

   a. Determina las componentes de los vectores.

   b. Determina la magnitud de ambos vectores.

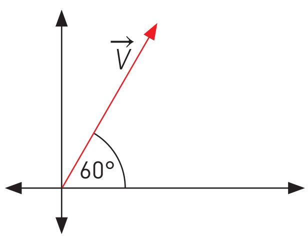
   c. Calcula la medida de α y β.

   ◆ ¿Qué diferencia existe en el resultado al utilizar la coordenada *y* con su signo y utilizarla sin su signo para calcular el ángulo β?

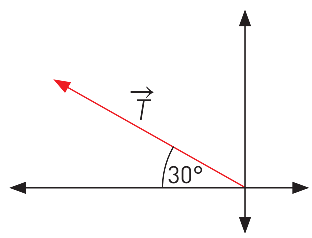


4. Aplica la descomposición a cada vector según la magnitud dada. Explica el signo de cada componente.

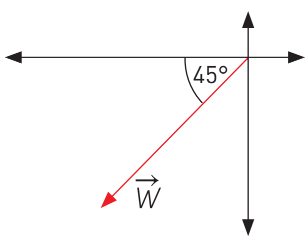
   a. $|\vec{V}| = 200$



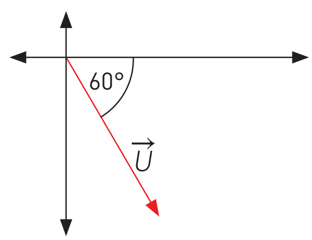
   c. $|\vec{T}| = 85$



   b. $|\vec{W}| = 18$

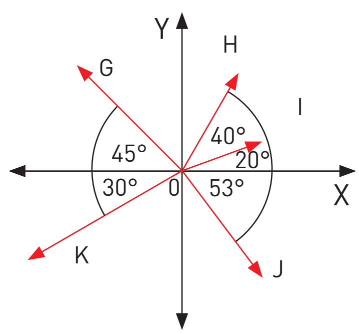


   d. $|\vec{U}| = 90$



5. Utiliza una calculadora científica para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

		Componentes	
Vector	Magnitud (u)	X	Y
G	2,4		
H	1,6		
I	1,3		
J	2,1		
K	2,7		



6. Calcula el vector velocidad y su dirección para el ciclista en la imagen 1 justo después de iniciar un salto. Considera las componentes según el sistema de referencia dado.

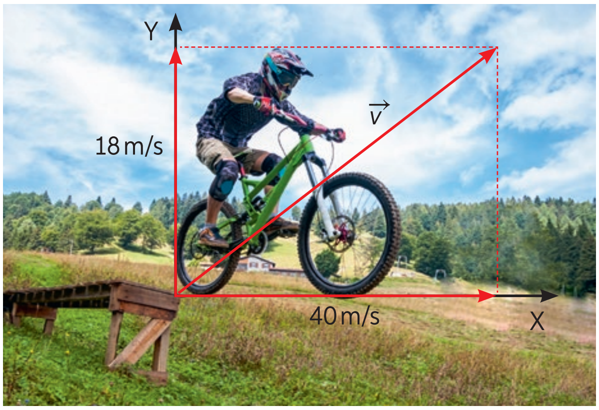


Imagen 1.

7. Un patinador profesional se lanza por una pista con un ángulo de elevación de 30°como se muestra en la imagen 2. Si su rapidez $\vec{v}$ en ese instante era 22 $\frac{m}{s}$, responde:

   a. ¿Cuál es su vector velocidad al momento de lanzarse?

   b. ¿Cuáles son los vectores de velocidad horizontal y vertical?

   c. ◆ En un segundo salto, su vector velocidad está dado por $\vec{v}$ = (30, 2). ¿Cuáles son sus vectores de velocidad horizontal y vertical?

   d. ¿Cuál es su rapidez en ese instante?

   e. ¿Con qué ángulo de elevación se lanzó?

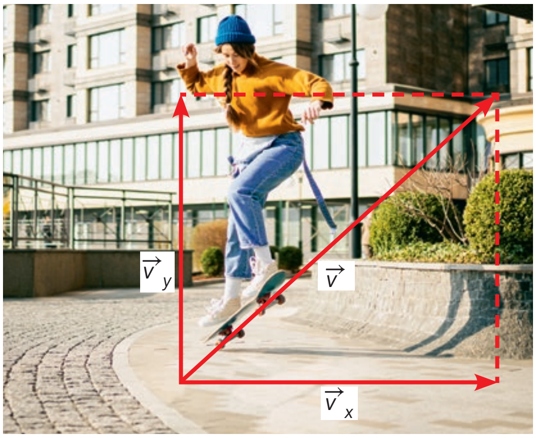


Imagen 2.

8. Un avión vuela a la rapidez constante x = 150 km/h. Por un viento cruzado (y) que viene perpendicular con respecto a la velocidad, el avión se desvía por un ángulo de 6°, como se muestra en la imagen 3. Observa el esquema y usa razones trigonométricas para resolver.

   a. Determina la velocidad y del viento cruzado.

   b. Calcula la velocidad total z.

   c. ◆ Verifica la velocidad total z aplicando el teorema de Pitágoras.

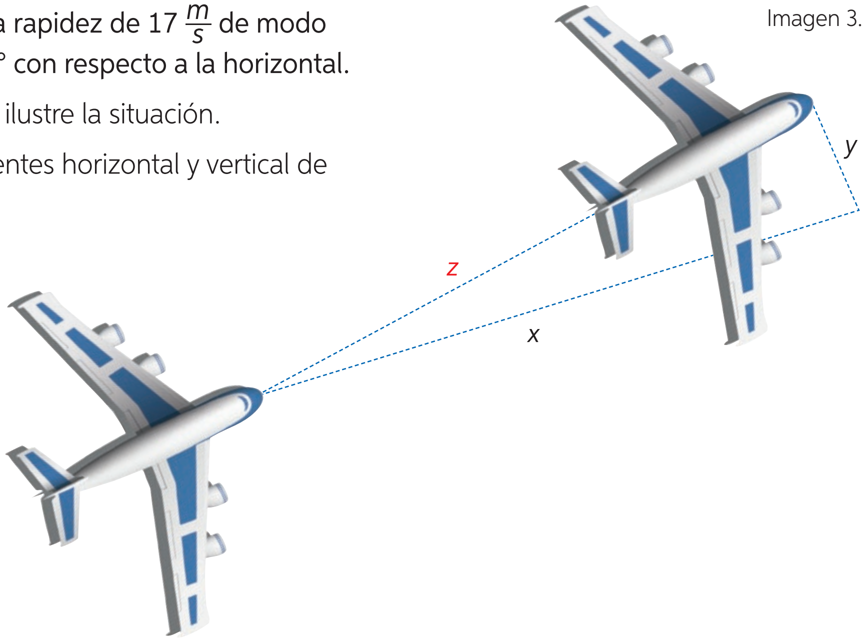
La velocidad se denota por $\vec{v}$ y corresponde a la relación entre el cambio de posición y el tiempo.

9. Un objeto se desplaza a una rapidez de 17 $\frac{m}{s}$ de modo que forma un ángulo de 60° con respecto a la horizontal.

   a. Realiza un esquema que ilustre la situación.

   b. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad?

Imagen 3.



10. Un dron despega desde un punto hacia la cima de un observatorio astronómico. Su rapidez es 20 m/s y forma un ángulo de elevación de 53°.

a. Realiza un esquema que ilustre la situación.

b. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP116A

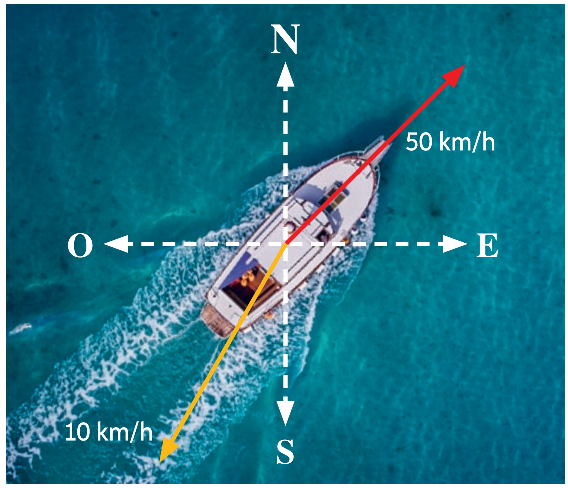
11. ◆ Un barco navega formando un ángulo de 45° con la vertical que indica el norte, tal como muestra el vector rojo en la imagen.

a. ¿Qué rapidez tiene en la dirección sur-norte?

b. ¿Qué rapidez tiene en la dirección oeste-este?

c. La corriente marina (en amarillo) empuja el barco en dirección sur-oeste con un ángulo de 30° respecto al sur. ¿Cuáles son las componentes de la corriente marina?

d. ¿Cuál es el vector resultante del movimiento del barco?



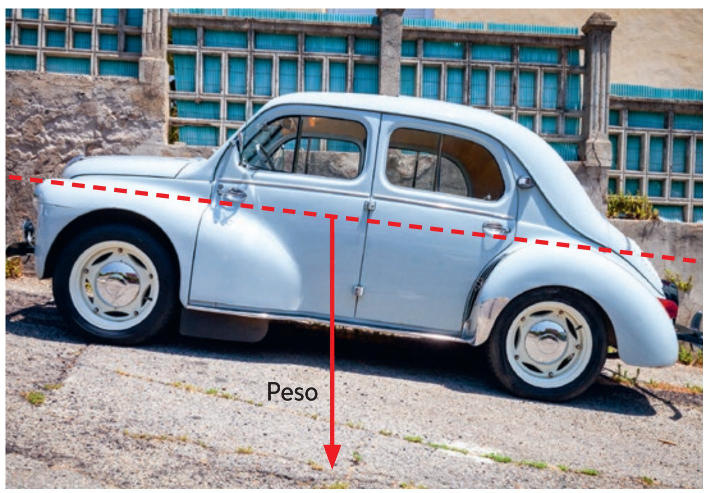
Actividades de profundización

12. ◆ Un auto de masa 1000 kg sube una pendiente con un ángulo de elevación de $\alpha = 10°$. El peso es una fuerza perpendicular a la horizontal. Su magnitud se calcula mediante la fórmula $P = m \cdot g$, donde g corresponde a la aceleración de gravedad ($g \approx 9{,}8$ m/s^2).

a. En parejas: ¿Qué condiciones debe cumplir la fuerza mínima generada por el motor del auto para compensar la fuerza que tira el auto hacia abajo en dirección de la pendiente?

b. Determina la fuerza mínima que debe generar el motor para moverse para contrarrestar el peso del auto.

c. Determina la fuerza mínima que debe generar el motor para moverse para contrarrestar el peso del auto para $\alpha = 30°$.



Evannovostro-Shutterstock com

Para concluir

a. ◆ ¿Qué elementos son necesarios para determinar las componentes de un vector? ¿Existe solo una manera de determinarlos?

b. ◆ ¿Por qué fue importante simplificar los modelos a triángulos rectángulos durante el desarrollo de este tema?

111 a 113

Vectores que se anulan

Materiales:
- Cartón o cartulina.
- Lápices de colores.
- Papel milimetrado u hojas cuadriculadas de cuaderno.
- Tijeras.
- Pegamento.
- Dados

Gracias a las funciones trigonométricas, puedes descomponer cualquier vector en componentes horizontales y verticales. Este método convierte la suma/resta de vectores en una operación entre componentes.

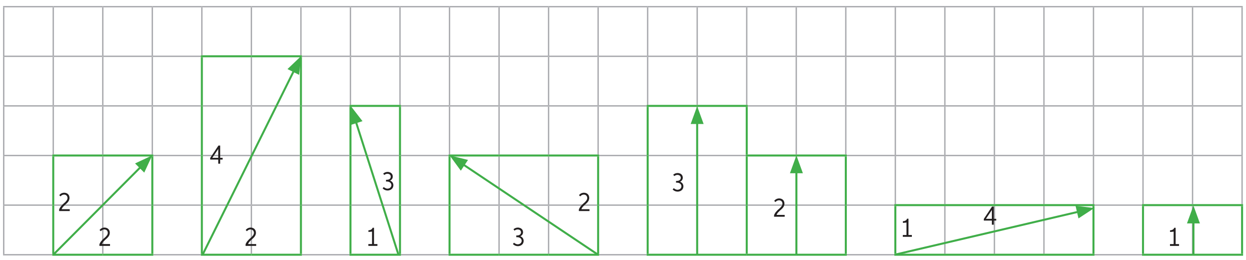
Para este juego de vectores realizarán la competencia en parejas.

Instrucciones del juego:
Para comenzar cada pareja lanza el dado y comienza la partida aquella que obtuvo el número mayor. La pareja coloca en la mesa una ficha cualquiera. Luego, la otra pareja continúa poniendo una ficha al lado. Cada vez que se pone una ficha, se suman los vectores. Gana la partida la pareja que logre anular el vector inicial.

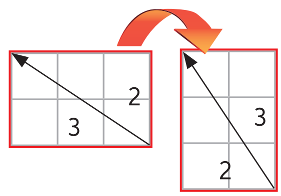
Se realizarán 10 partidas del juego para determinar a la pareja ganadora.

Elaborando las fichas:

PASO 1: En una hoja cuadriculada dibujen los siguientes vectores. Escriban sus componentes en el mismo dibujo.



PASO 2: Recorten cada ficha y peguen en cartulina o cartón. Observen cómo, dependiendo la posición de la carta, las componentes indicadas pueden ser verticales u horizontales.

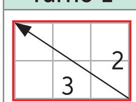
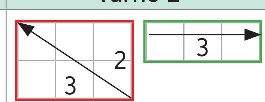
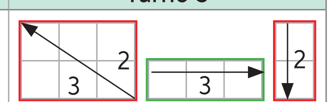


¿De cuántas formas diferentes es posible utilizar cada ficha?

Un ejemplo de juego:

PASO 1: Comienza el equipo rojo colocando la ficha (-3, 2)

PASO 2: Sigue el equipo verde colocando la ficha (3, 0).
Sumas las fichas y da como resultado el vector (0, 2), por lo tanto continúan la partida.

Turno 1	Turno 2	Turno 3
		
(–3, 2)	(–3, 2) + (3, 0) = (0, 2)	(0, 2) + (0, –2) = (0, 0)

PASO 3: El equipo rojo coloca la ficha (0, –2). Al sumar los vectores, se obtiene (0,0). Por lo tanto, el equipo rojo gana la partida.

Reflexiono

a. ¿Podría ocurrir que no se anule el vector resultante? Argumenta y da ejemplos.

b. ¿Crees que este juego te sirvió para reforzar el contenido de vectores? Explica.

c. ¿Qué importancia tiene para tu aprendizaje realizar este tipo de actividades?

114 y 115

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Responde a partir de la imagen.

1. Asumiendo que la Tierra posee la forma de una esfera perfecta, cuyo radio es de aproximadamente 6 300 km, determina:
   - **a.** ¿Cuál es el largo aproximado de la línea ecuatorial?
   - **b.** Sabemos que el agua cubre $\frac{3}{4}$ de la superficie terrestre. ¿A cuántos km^2 equivale su área total? ¿Cuántos km^2 corresponden a tierra firme?
   - **c.** La corteza terrestre mide un ancho promedio de 25 km. ¿Cuál es su volumen? ¿Cuál es el volumen del resto de nuestro planeta?
2. Analiza y resuelve los siguientes problemas:
   - **a.** Un modelo esférico de la Tierra tiene un radio de 4 m. Calcula la longitud de su línea del ecuador (circunferencia máxima) y el área de su superficie.
   - **b.** El radio de la base de un tarro cilíndrico de metal son 76 cm y su altura es el triple de su diámetro basal. Calcula el volumen máximo que podría tener una esfera para estar dentro de ese tarro.
   - **c.** Se tiene una esfera de 5 cm de radio y un cono con el mismo radio y altura 10 cm. ¿Cuál es la suma de sus volúmenes?
3. Un depósito de diésel tiene forma esférica y un radio de 2,5 metros. Indica su volumen en litros y el costo de llenarlo si el litro de diésel costara $600.
4. Se caminan 120 metros por una autopista recta. La depresión con respecto a la posición original es de 10 metros. Calcula el ángulo de inclinación de la carretera.
5. Un poste de 3 metros proyecta en el suelo una sombra de 1,2 metros. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares?

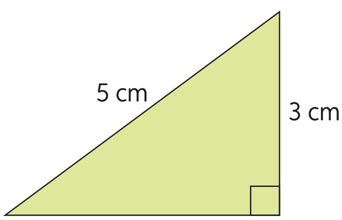
Sabemos que nuestro planeta no es una esfera perfecta. Sin embargo, podemos interpretarla como tal para calcular distancias con bastante precisión.

Por ejemplo, si recorremos cierta distancia sobre la línea ecuatorial, podemos calcular el ángulo recorrido con respecto al centro de la Tierra.

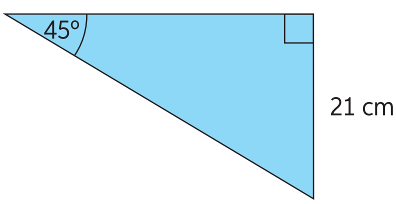
También podemos medir el área total de la superficie del planeta y, con ello, estimar su radio. Finalmente, a partir de ese último valor, podemos calcular un aproximado del volumen total de la Tierra.

6. Completa los siguientes triángulos rectángulos. Indica los lados y ángulos que faltan en cada caso. Aproxima los valores a la décima:

a.

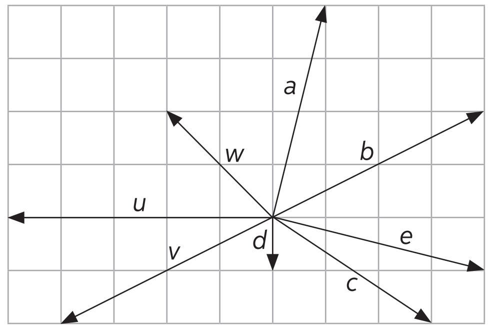


b.



c. Triángulo rectángulo cuyo cateto mide 12,5 cm y su hipotenusa, 19 cm.

7. Observa el siguiente grupo de vectores sobre el plano cartesiano.

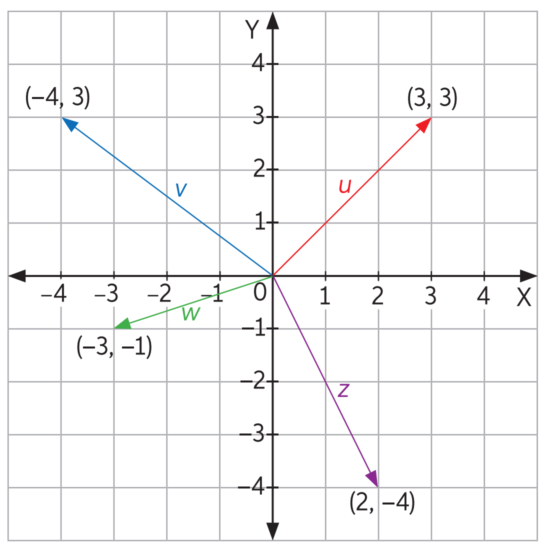


a. Indica sus componentes verticales y horizontales.

b. Con la relación trigonométrica adecuada, indica el ángulo de cada vector con respecto al eje horizontal

c. Calcula el vector resultante de la suma de todos los vectores de la figura.

8. Determina las proyecciones de cada vector según la información entregada en la imagen.



Reflexiono

- ¿Qué conocimientos de circunferencia utilizaste para determinar las medidas de una esfera?
- ¿Qué te resultó más difícil en esta evaluación? ¿Cómo podrías mejorar?

Instagram cuenta con más de 900 millones de usuarios activos. Una radio decide incluir a Leo_Music*, instagrammer con 500 000 seguidores, como parte permanente de su nueva programación.

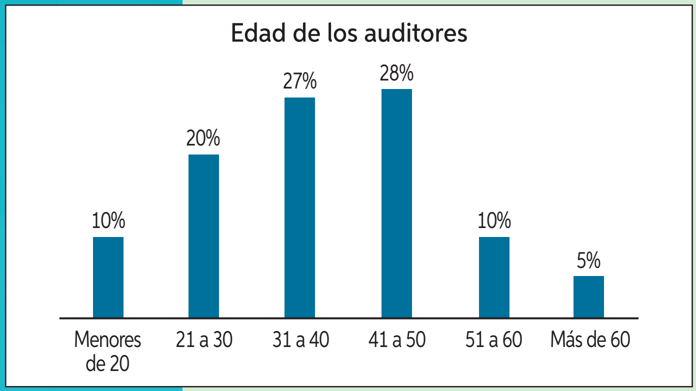
*Personaje ficticio.

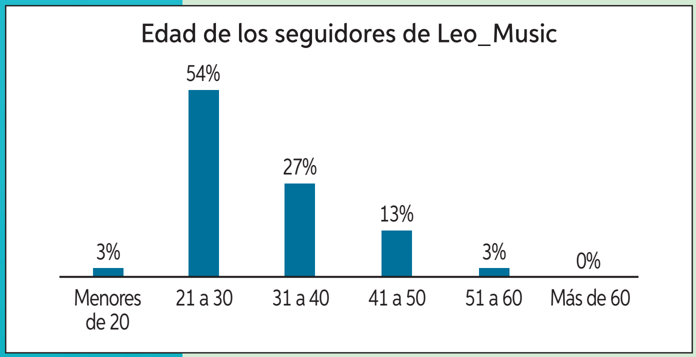
Unidad

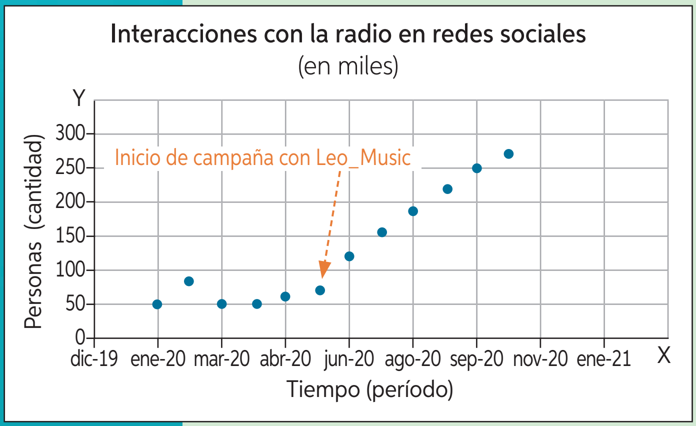
4 Probabilidad y estadística

En esta Unidad aprenderás técnicas de conteos. También aprenderás el uso de variable aleatoria y la estadística en los medios de comunicación.

1. ¿Qué otras estrategias conoces para hacer que los clientes de una marca se sientan "más cercanos"? Ejemplifica.
2. ¿Qué variables miden los gráficos? ¿Cuáles pueden ser sus valores?
3. ¿Qué gráfico(s) utilizarías para evaluar si Leo_Music fue una buena estrategia para promocionar la radio? Discute con tu curso.







El *engagement* (palabra inglesa que significa compromiso) es un término utilizado en publicidad. Con él se describe la cercanía entre una marca y las personas que la siguen en el mundo digital.

Existen muchas maneras de medirlo. Algunas son las veces que un cliente realiza una compra, las de las visitas al sitio web, las interacciones de las redes sociales (como los "me gusta") y la cantidad de comentarios en las publicaciones.

4. Se premia a un auditor elegido al azar y a un seguidor de Leo_Music. ¿Es posible que ambos seleccionados tengan entre 21 a 30 años? ¿Y qué ambos tengan más de 60 años?

5. ¿Qué otras variables, que no se encuentren en los gráficos, podrías utilizar para evaluar el efecto de Leo_Music en la promoción de la radio? Da 3 ejemplos.

Activo lo que sé

1. Define con tus palabras los siguientes conceptos.
   - a. Espacio muestral
   - b. Experimento aleatorio
   - c. Probabilidad
   - d. Principio multiplicativo
   - e. Diagrama de árbol.

2. Determina el espacio muestral y la cardinalidad que asociamos a los siguientes experimentos aleatorios.

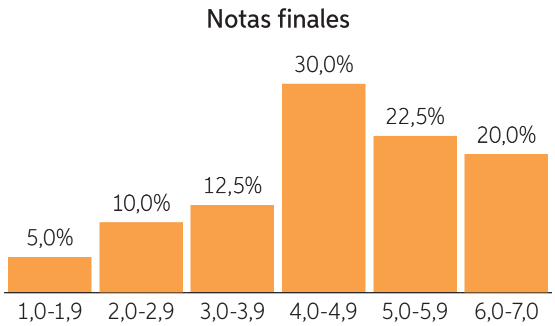
   Por ejemplo:
   Lanzar dos monedas tenemos cara (c) y sello (s)
   $\Omega = \{\{c, c\}; \{c, s\}; \{s, c\}; \{s, s\}\}$

   - a. Lanzar dos monedas y un dado.
   - b. Sacar una bolita de una caja que contiene 3 bolitas de color rojo,1 azul y 2 amarillas. Luego lanzar al aire una moneda.

3. Gabriel necesita escoger su vestimenta para una fiesta. En su clóset tiene 5 camisas, 3 jeans, 2 pantalones de tela, 4 pares de zapatos y 7 cinturones. ¿Cuántas tenidas diferentes tiene para escoger? Realiza un diagrama de árbol como ayuda.

4. En una urna hay bolitas numeradas del 5 al 30. Si se saca una bolita al azar, calcula las siguientes probabilidades.
   - a. Obtener un número multiplo de 5.
   - b. Obtener un número primo.
   - c. Obtener un número par y mayor que 20.
   - d. Obtener un número mayor que 15 o divisor de 30.

5. El siguiente gráfico muestra la distribución de notas de 40 estudiantes de un curso.



   - a. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron nota azul?
   - b. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron nota inferior a 6,0?
   - c. Supón que este gráfico representa la probabilidad de obtener una nota. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un curso de 30 personas, alguien obtenga nota entre 6 y 7?

6. Resuelve los siguientes desafíos:
   - a. Calcula la probabilidad de que, al elegir una carta al azar de un naipe inglés, el número sea mayor a 10.
   - b. Los tomos de un diccionario están numerados del 1 al 5. ¿De cuántas formas diferentes se los puede ordenar en la misma repisa?
   - c. Se lanza un dado de seis caras numeradas. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea par o menor que 3?
   - d. Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera se obtenga cara y en la segunda sello?

Reflexiono

- ¿Hay alguna actividad que te generó dificultades? ¿Por qué?
- ¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad?
- ¿Qué conceptos es necesario reforzar?

Lección
10 Técnicas de conteo

Principios básicos de conteo

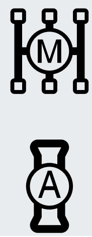
¿Qué es un experimento aleatorio?
¿Cómo se determina el espacio muestral de un experimento aleatorio?

Objetivo: Aplicar el principio aditivo y multiplicativo para resolver problemas.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una automotora se tienen las siguientes opciones para la compra de un automóvil.

Modelo de automóvil



Tipo de transmisión

a. Realiza un diagrama de árbol que represente las posibilidades que tiene un cliente para elegir un automóvil.

b. ¿Cuántas opciones de automóvil tiene un cliente para elegir?

c. ¿Qué operación matemática puedes realizar para obtener el total de opciones de automóvil?

Durante la última semana, la automotora se ha provisto de más automóviles. Ahora da la posibilidad de que los clientes pueden elegir diferentes colores de automóvil. Estos son: rojo, plata, blanco, azul y dorado.

d. Realiza un diagrama de árbol que represente la cantidad de posibilidades que tiene un cliente para elegir su automóvil.

e. ¿Cuántas opciones de automóvil tiene un cliente para elegir?

Contar la cantidad de elementos de conjuntos, relacionarlos todos entre sí o formar subgrupos respondiendo a determinadas características permite conocer de antemano el número de elementos muestrales en dicho experimento.

Las técnicas de conteo que estudiarás en esta lección permiten determinar el número de elementos de un espacio muestral en un experimento aleatorio, teniendo en cuenta el orden y la repetición de los elementos. Algunas son: el principio de multiplicación, la permutación y la combinación; las cuales se pueden complementar con diagramas de árbol.

En el caso anterior, ¿se verifica la conjetura que hiciste en la actividad anterior?

El **principio multiplicativo** establece que, si un procedimiento se compone de dos etapas, que tienen respectivamente m y n posibilidades, entonces dicho procedimiento tiene $m \cdot n$ casos posibles en total. Si luego se agrega una nueva etapa, que tenga p posibilidades, el procedimiento tendrá $m \cdot n \cdot p$ casos posibles. Es decir, siempre se multiplica por la cantidad de posibilidades de cada etapa.

Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado y una moneda, se tiene que el espacio muestral del dado es 6 y la moneda 2. Luego la cantidad total de posibilidades son $6 \cdot 2 = 12$.

2. En un experimento se extrae una bolita de la urna como la que se muestra en la imagen.

a. ¿Cómo expresarías el producto que permite calcular los resultados posibles de una extracción de 3 pelotitas con reposición?

b. ¿Cuántos resultados posibles tiene el experimento?

c. La extracción de las tres pelotitas se realiza sin reposición. ¿Cómo se expresa el producto que permite calcular los resultados posibles del experimento? ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento?

Observa los resultados de a y c. ¿Cómo influye en el resultado el tipo de extracción que se realizó?

3. En una competencia de atletismo, participan Hugo, Marcelo, Emilio y Rubén. Las marcas que ellos obtengan determinarán los cuatro lugares de la competencia.

a. ¿Cuáles son todos resultados posibles? Escriban todas las posibilidades.

b. El entrenador cree que Marcelo ganará la competencia y que Hugo resultará último. Si así fuera, ¿cuántos son los resultados posibles?

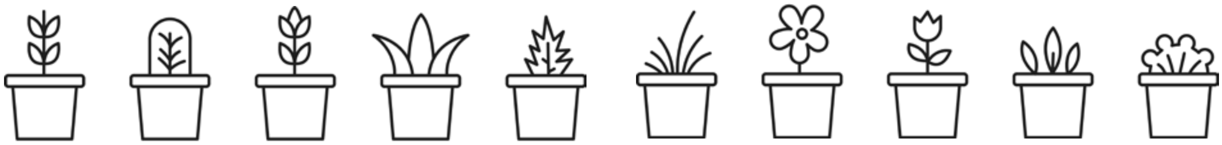
c. Si se agrega un quinto competidor, ¿cuántos serían los resultados posibles en total?

4. Martina decide pintar el siguiente dibujo con los lápices que se muestran en la figura. Ha decidido pintar cada maceta de un color diferente.

a. ¿Cuántas opciones tiene Martina para pintar los maceteros del dibujo? Exprésalo como la multiplicación de factores.

b. Si Martina decidiera pintar los dos primeros maceteros del mismo color, luego los dos siguientes de otro color, y así sucesivamente. ¿Cómo expresarías la multiplicación que permite obtener el resultado?

c. ¿Cuántas combinaciones posibles hay el caso anterior?



5. La familia Tapia tiene diferentes alternativas para viajar en sus próximas vacaciones. Para decidir, han definido las siguientes categorías acerca de las que deben decidir.

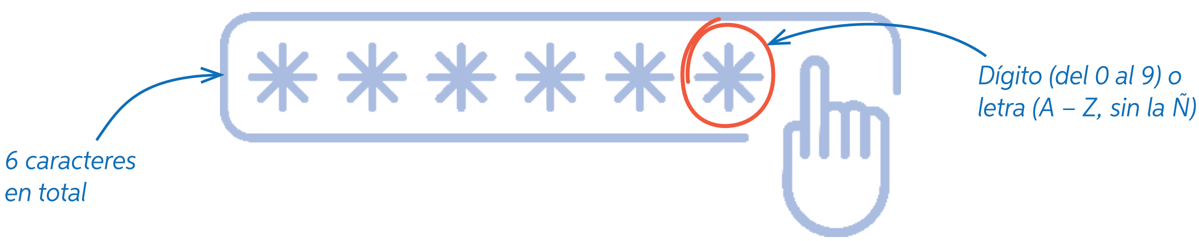
Lugar geográfico	Destino turístico	Transporte	Tipo de alojamiento
Norte	Playa	Bus	Hotel
Sur	Campo	Automóvil	Cabañas
	Montaña	Avión	Camping
	Lago		

a. ¿Cuántas opciones tienen en total los Tapia para sus vacaciones?

b. Supón que viajan en bus. ¿Cuántas opciones tienen para vacacionar?

c. Imagina que deciden no viajar en avión ni ir al campo. ¿Cuántas opciones tienen para vacacionar?

6. Por seguridad, una empresa solicita a sus trabajadores que creen una clave para sus cuentas institucionales. La clave debe ser:



Por ejemplo, el total de claves con 6 dígitos son:

Con repetición: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$ claves distintas

Sin repetición: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,480$ claves distintas

a. ¿Cuántas opciones distintas se puede poner en cada carácter?

b. ¿Cuántas claves pueden crearse si la secuencia debe ser dígito – dígito – letra – letra – dígito – letra, y no pueden repetirse ni letras ni dígitos?

c. ¿Cuántas claves pueden crearse si la secuencia debe ser letra – dígito – dígito – letra – dígito – letra, y no pueden repetirse los dígitos?

d. Se incluye, además, la diferenciación entre mayúsculas y minúsculas. ¿Cuántas combinaciones más se agregan para cada carácter? ¿Las consideras más seguras?

Para concluir

a. ¿Cuál es la utilidad de un diagrama de árbol y en qué casos se puede utilizar?

b. Inventa un problema en el cual se utilice el principio multiplicativo y resuélvelo.

116 y 117

Permutaciones

¿De cuántas formas posibles se pueden ordenar las letras de la palabra UNO?

¿En qué casos utilizarías el principio multiplicativo?, ¿en cuáles no?

Objetivo: Aplicar permutaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. Antonia quiere saber de cuántas maneras puede colocar en el estante de su casa los libros que se muestran en la imagen.

a. En parejas, anoten todas las posibles formas en las que se puede ordenar los libros.

b. ¿Cuántas formas distintas hay de ordenar los libros? Compara tu respuesta con otra pareja.

c. Si el primer libro de izquierda a derecha es el de Ciencias, ¿en cuántas de ellos el segundo libro es Arquitectura? ¿Es la misma cantidad para aquellos casos en que el segundo libro es otro?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al ordenar al azar sus libros, el primer libro sea el de Ciencias?

Describe el procedimiento utilizado para hacer la lista de todas las posibles formas de ordenar el estante.

Una **permutación** de un conjunto de n elementos corresponde a la ordenación de estos. El número total de permutaciones entre n elementos distintos se denota como P_n y está dado por:

$$P_n = n!$$

Donde $n!$ se llama n factorial y corresponde al producto:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Además, se considera $0! = 1$

Ejemplo: ¿Cuántos números distintos de tres cifras diferentes se pueden escribir con los dígitos 1, 2 y 3?

Anotamos los números que se pueden formar: 123 213 321 132 231 312

Al aplicar la fórmula se tiene: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Para calcular el total de permutaciones de n elementos, de los cuales uno de ellos se repite p veces, otra q veces, otro r veces, y así sucesivamente, puedes aplicar la siguiente expresión:

$$P^n_{p,q,r} = \frac{n!}{p! \cdot r! \cdot q!}$$

Ejemplo: Se tiene un conjunto con los elementos {C, D, E, E}.

Las permutaciones que se pueden formar son:

CDEF – CEDE – CEED – DCEE – DECE – DEEC – ECDE – ECED – EDCE – EDEC – EECD – EEDC

El conjunto tiene 4 elementos, por lo que $n = 4$, y hay un elemento que se repite. Al reemplazar en la fórmula, se obtiene lo siguiente:

$$P^4_{(2,1,1)} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

De esta manera, se comprueba aplicando la fórmula que la cantidad de permutaciones es 12.

2. Calcula:

a. P_3

b. P_7

c. P_9

d. $P_5 \cdot P_2$

e. $P_7 : P_5$

f. $P_{12} : P_3$

3. Identifica a qué tipo de permutación (con o sin repetición) corresponden los siguientes casos:

a. Las formas en que se pueden ordenar los puestos de trabajo de 10 personas.

b. Las formas en que se pueden ordenar las letras de la palabra EXTERIOR.

c. El orden en que se que puede reproducir una lista de 15 canciones.

d. Las formas en que se pueden ordenar los dígitos 01255797.

4. En una fila hay 6 sillas. Estas son para Daniel, Elías, Andrea, Carmen, Isabel, Laura.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar las 6 personas en las sillas?

b. Se decide que los dos hombres deben quedar en los extremos de la fila. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar las personas?

c. ¿Qué técnica empleaste para resolver el caso anterior? Coméntala junto a tu curso.

5. Diego quiere formar una clave para su candado que contenga los números 2, 2, 5, 8.

a. ¿Cuántas claves diferentes puede formar? Anótalas.

b. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre esta situación y la actividad anterior?

6. Se tienen los dígitos 1,2,3,4,5,6,7.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los dígitos si el 5 y el 1 deben quedar en los extremos?

b. ¿Qué estrategia utilizaste para calcular el caso anterior?

c. Se quiere que el 3 y el 7 queden en los extremos y el 4 en el centro. ¿De cuántas manera cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los dígitos?

¿Qué estrategia utilizaste para calcular el caso anterior? Compárala con tu curso.

7. Un concurso consiste en extraer 4 sobres de la tómbola que se muestra en la imagen. Si un concursante logra extraer los sobres con letras en el orden POZO, recibe un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante gane el premio?

Para concluir

a. ¿En qué consiste una permutación? ¿Qué tipos de permutación conoces?

b. ¿Qué representación del experimento te ayudó a entender las permutaciones y su relación con el número factorial?

118 a 120

Variaciones

¿Qué características tienen las permutaciones?
¿En qué casos se aplican las permutaciones?

Objetivo: Aplicar variaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una carrera de ciclismo se tienen cuatro competidores. De ellos, serán premiados los tres primeros lugares con las medallas de oro, plata y bronce.

a. ¿Es importante el orden en el que cada ciclista finalice la carrera?, ¿por qué? Justifica.

b. ¿De cuántas formas posibles se pueden entregar las medallas de oro, plata y bronce? Anota las posibilidades.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Francisco obtenga el primer lugar?

Se llama variación de k elementos escogidos entre n y se denomina V_k^n a la cantidad de ordenamientos posibles de k elementos, escogidos entre n.

- Una variación **sin repetición** se calcula como:
$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- Una variación **con repetición** se calcula como:
$$Vr_k^n = n^k$$

Por ejemplo:

Calcular cuántos números de dos dígitos se pueden formar utilizando las tarjetas: 4, 5 y 7.

- *Sin repetición:*

Los números que se pueden formar son: 45 – 47 – 54 – 57 – 74 – 75

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, n = 3 y m = 2, y además los números no se pueden repetir, se obtiene: $V_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

- *Con repetición:*

Los números que se pueden formar son: 44 – 45 – 47 – 54 – 55 – 57 – 74 – 75 – 77

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, n = 3 y m = 2, y además los números no se pueden repetir, se obtiene: $Vr_2^3 = 3^2 = 9$

◆ ¿En qué atributos de una situación te fijarías para distinguir si una situación corresponde a una permutación o a una variación?

2. Si a la carrera de ciclismo se suma otro competidor, Alejandro. Responde:

a. ¿A qué tipo de variación corresponde esta situación?

b. ¿Cuántos participantes quedarán sin premio?

c. ¿Cuáles son los valores de n y k en esta nueva variación?

d. Calcula el número de combinaciones posibles para la obtención de las medallas de oro, plata y bronce.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Alejandro obtenga el primer lugar?

f. ¿En cuántas combinaciones Alejandro obtiene el primer lugar y Jaime obtiene el segundo lugar? Expresa tu resultado como una variación.

◆ ¿Qué estrategia utilizaste para resolver la actividad anterior? Explica.

3. Calcula:

a. V^{7}_{2} b. V^{10}_{4} c. V^{23}_{5} d. Vr^{8}_{2} e. Vr^{6}_{4} f. Vr^{15}_{6}

4. Determina el valor de n o k según corresponda:

a. $Vr^{n}_{3} = 216$
b. $Vr^{8}_{k} = 512$
c. $Vr^{n}_{2} = 121$
d. $Vr^{n}_{3} = 125$
e. $Vr^{2}_{k} = 32$
f. $Vr^{n}_{4} = 1296$

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de 5 letras no repetidas se pueden formar con las letras de la palabra SECTOR?

b. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero. ¿Cuántas son las directivas posibles?

c. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden construir utilizando los dígitos 2, 4, 6 y 8?

d. En cierto país, las patentes vehiculares están formadas solo por 4 letras del abecedario distintas (incluyendo la ñ). ¿Cuántas patentes se pueden formar con esa condición?

e. La contraseña de cierto tipo de cuenta consiste en un número de 4 dígitos cuyas cifras se pueden repetir. A esto, le siguen 3 vocales que no se pueden repetir. ¿Cuántas contraseñas se pueden crear siguiendo dichas condiciones?

6. Cada uno de los profesores de Matemática, Física y Química elegirá secretamente a un estudiante de 9 posibles para participar en un seminario.

a. Para este caso, ¿cuál es el tipo de variación?

b. ¿Cuántas ternas de estudiantes se pueden formar?

7. Se lanza un dado de 12 caras tres veces.

a. ¿Cuántos son los resultados posibles?

b. ◆ Si se lanza el mismo dado una vez más, ¿en cuánto aumentan la cantidad de resultados?

Para concluir

a. ¿Qué tuviste dificultades para resolver las actividades del tema?

b. ¿En qué aspectos de una situación te fijarías para determinar que se debe utilizar una variación?

121 a 123

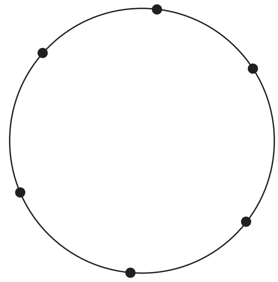
Combinaciones

¿Cómo se calcula una variación sin repetición?
¿Importa el orden dentro de una variación?

Objetivo: Aplicar las combinaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. ◆ Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una circunferencia, se han trazado 6 puntos, como se muestra en la figura.



a. Se quiere formar triángulos distintos utilizando los puntos. Si la consideramos una variación sin repetición, ¿cuáles serían los valores de *n* y *k*?

b. ¿Cuántos órdenes posibles determinaste para el caso anterior?

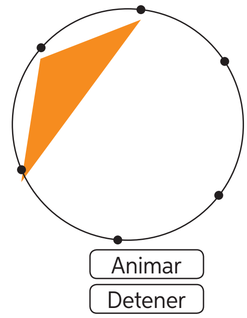
c. Considera un triángulo cualquiera. ¿Cuántos órdenes posibles de sus vértices denotan el mismo triángulo? ¿Qué técnica de conteo te permite realizar ese cálculo?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP130A

d. Consideremos que un mismo triángulo tiene más de una forma de escribirse y el orden de los vértices no importa. ¿Podríamos seguir aplicando una variación?

e. En el recurso GeoGebra, selecciona “animar” para observar cuántos triángulos se pueden formar con los puntos dados. ¿Cuántos triángulos diferentes hay?

f. Calcula el cociente entre los resultados que obtuviste en *b* y *c*. ¿Qué observaste?



Se llama combinación de *k* elementos escogidos entre *n* a la cantidad de posibilidades que hay de escoger *k* elementos distintos de un total de *n*, sin que importe el orden en que son escogidos. Para el caso **sin repetición**, la cantidad total de combinaciones se escribe como C_k^n, y se puede calcular como:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ejemplo: en un taller de tejidos, hay 4 colores de lana: blanco (B), azul (A), rosado (R) y verde (V). Si cada asistente debe elegir 3 colores diferentes para confeccionar una bufanda, ¿cuántas elecciones puede realizar?

Identificamos los datos, n = 4 (4 opciones posibles), k = 3 (3 son seleccionadas) y que cada asistente debe escoger colores diferentes (sin repetición), al reemplazar en la expresión, se obtiene:

$$C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow \text{4 elecciones diferentes}$$

La expresión $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ suele escribirse como $\binom{n}{k}$ -que se lee “*n* sobre *k*”- y recibe el nombre de número combinatorio. Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- Cualquier número sobre 0 es igual a 1
- Todo número sobre sí mismo es igual a 1.
- Un número sobre 1 siempre es igual al número.

Cuando una combinación se realiza **con repetición** de elementos, se debe utilizar la expresión:

$$Cr_k^n = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! \cdot k!}$$

Ejemplo: En el mismo taller de tejidos, se confeccionan chalecos usando dos de los colores, que pueden ser iguales. ¿Cuántas son las posibles combinaciones de colores?

BB – BA – BR – BV –AR –AA – AV – RR – RV –VV → 10 elecciones diferentes.

Sabiendo que n = 4 y k = 2, al reemplazar los valores en la expresión, se obtiene:

$$Cr_k^n = \frac{(4 + 2 - 1)!}{(4 - 1)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

2. Calcula:

a. C_4^8

b. C_3^6

c. C_5^{10}

d. Cr_5^{13}

e. Cr_8^{10}

f. Cr_5^7

3. Matilde debe elegir mensualmente 4 de los siguientes tickets.

a. El orden de la elección de los tickets no importa. ¿Cuántas elecciones distintas podría hacer Matilde?

b. ◆ Se agregan las opciones Estadio y Concierto, pero se reduce la elección de tickets a 3. ¿Cuántas elecciones distintas podría hacer Matilde?

4. Resuelve los siguientes problemas:

a. En un juego de azar, se deben acertar 6 de 36 números en sorteo, mientras que en otro, se debe acertar en 10 de 20. ¿Cuál de los dos juegos tiene la mayor cantidad de resultados posibles?

b. En un curso de 35 estudiantes, se deben elegir a 4 de ellos para formar parte de la patrulla ecológica del colegio. ¿Cuántos grupos distintos se podrían formar?

c. Para un paseo familiar, Nicolás debe comprar tres bebidas en un supermercado que ofrece 6 tipos distintos. ¿Cuántos grupos distintos de bebidas podría comprar si solo puede llevar dos o tres del mismo tipo?

d. ¿Cuántos equipos de futbolito de 7 jugadores se pueden formar con un grupo de 10 jugadores?

5. De un grupo de 13 atletas compuesto por 8 hombres y 5 mujeres, se debe escoger a 6 para una competencia.

a. ¿Cuántas son las combinaciones que se pueden elegir?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 competidores escogidos sean hombres?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, entre los 6 escogidos, al menos haya 3 mujeres?

Para concluir

a. ◆ ¿En qué consiste una combinación? Explícaselo con un ejemplo a tus compañeros.

b. ◆ ¿En qué se diferencian la combinatoria de la variación y la permutación? Comenta con tu curso

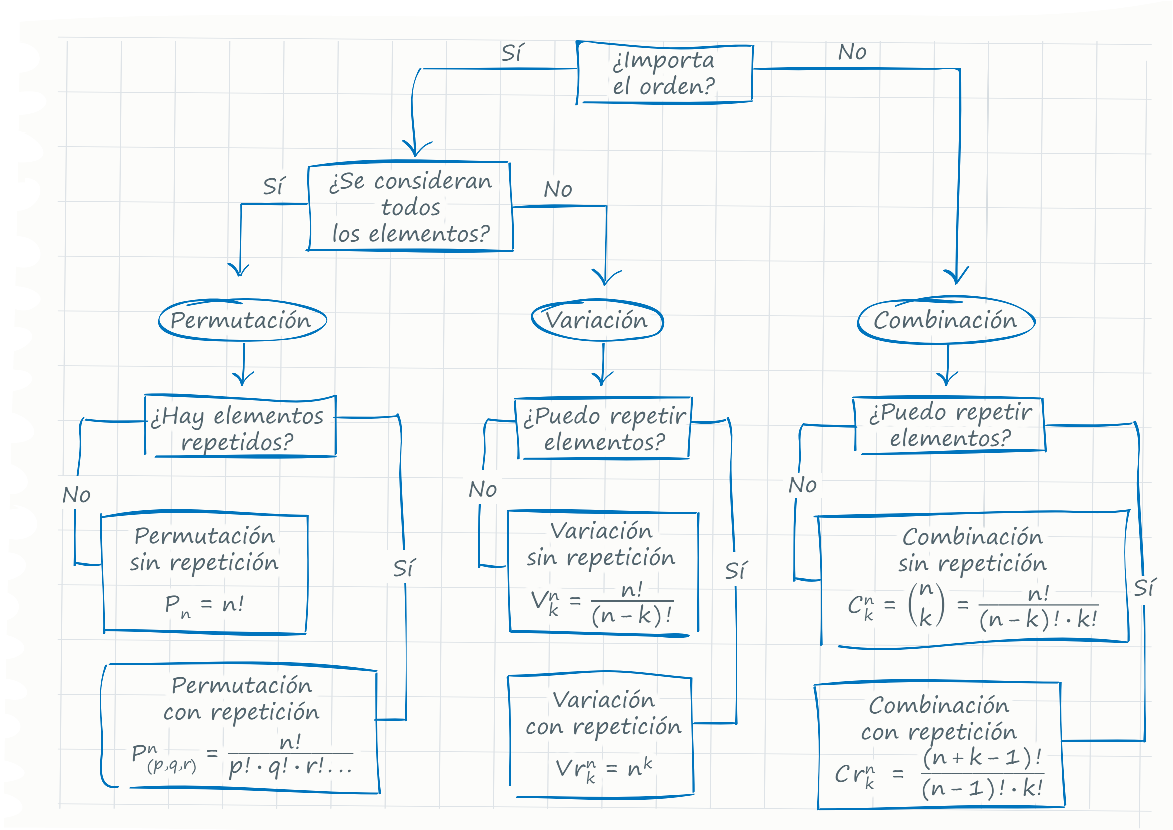
124 a 126

Aplicaciones

¿En qué se diferencian las técnicas de conteo que conoces? ¿Cuándo aplicas cada una?

Objetivo: Modelar situaciones aplicando el principio multiplicativo, variaciones, permutaciones y combinaciones para resolver problemas y calcular probabilidades.

De acuerdo con las características de un problema, puedes saber si corresponde a un caso de permutaciones, variaciones o combinaciones, utilizando el siguiente esquema:



1. Determina a qué tipo de técnica de conteo corresponde cada situación:

a. El número de palabras con o sin sentido que se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO.

b. Los números de dos cifras que se pueden formar mezclando los dígitos 3, 5 y 7.

c. Los rankings de 3 estudiantes, hechos a partir de 6 de ellos.

d. El número de chalecos de dos colores (elegibles entre rojo, verde, gris y negro) que se pueden repetir, sin importar el orden.

e. Los votos de 15 estudiantes para elegir al presidente de curso entre 4 candidatos.

f. Los números de uno, dos y tres cifras que se pueden formar usando los dígitos 1, 2 y 3.

2. Para una pareja que tiene tres hijos:

   a. Realiza un diagrama de árbol que muestre las posibilidades de sexo para cada hijo. Considera equiprobable hombre y mujer.

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres hijos sean mujeres?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que dos hijos sean hombres, sin importar el orden?

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros hijos sean hombres?

3. Rosa tiene 3 anillos diferentes. De acuerdo a esta información, responde:

   a. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar los tres anillos en cinco dedos si es posible poner más de un anillo en el mismo dedo?

   b. Para el caso anterior, ¿importa el orden en que sean colocados los anillos en el mismo dedo?

   c. Imagina que solo se puede colocar un anillo en cada dedo. ¿Cuántas formas posibles hay de colocar los tres anillos en la mano?

4. Se tiene un número de tres cifras seleccionado al azar:

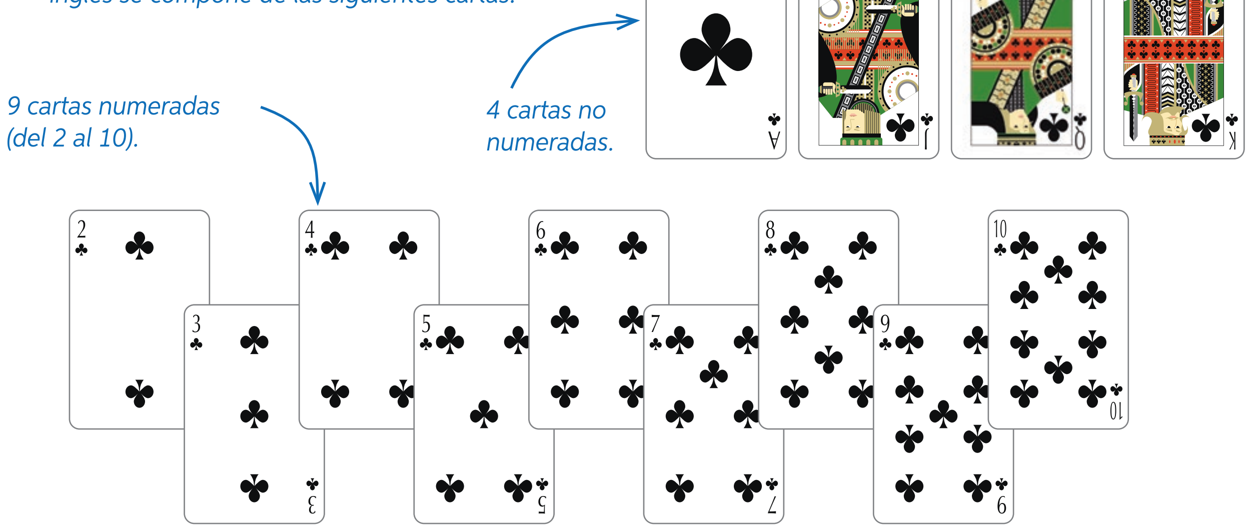
   a. ¿Cómo calcularías la cantidad de números de tres cifras que existen?

   b. ¿Cuántos números de tres cifras distintas existen?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar un número de tres cifras al azar, este contenga dígitos repetidos?

5. Una baraja inglesa contiene 52 cartas, las cuales se dividen en 4 pintas (picas, diamantes, tréboles y corazones). Cada una de ellas contiene 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K).

Recuerda que cada pinta (♣, ♥, ♠ y ♦) del naipe ingles se compone de las siguientes cartas:



   a. ¿De cuántas formas se pueden extraer 15 cartas, sin considerar el orden?

   b. ¿Cuántos conjuntos de 15 cartas no contienen ninguna letra?

   c. Si se extraen 15 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que contengan al menos una letra?

6. Marcos realiza un test de 10 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 alternativas, de las cuales solo una es la correcta. Si responde al azar:

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos acierte en todas las preguntas?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos acierte exactamente 6 preguntas?

7. En un matrimonio, 4 parejas quieren tomarse una foto en fila junto a los novios, de manera que cada persona esté junto a su pareja. ¿De cuántas formas pueden ordenarse para la foto si los novios deben quedar en el centro de la fila?

8. En todo campeonato de fútbol en el que todos los equipos juegan contra todos, importa saber en qué momento se enfrentarán los dos más populares. Por ello, al hacer la programación se intenta que jueguen en fechas centrales. Es decir, que no se enfrenten cuando el campeonato esté definido o que sea una final anticipada.

   Se está organizando un campeonato de fútbol en el que participan 12 equipos:

   a. ¿Cuántos partidos se deben jugar en total?

   b. ¿En cuántas fechas es posible completar el campeonato? ¿por qué?

   c. En tu cuaderno, construye una tabla en la que se muestre el desarrollo del campeonato. Es decir, cuáles partidos se juegan en cada fecha. Considera que cada equipo juega solo un partido por fecha. Luego, organiza un orden posible para cada partido. ¿De cuántas maneras distintas se podrían ordenar? Explica.

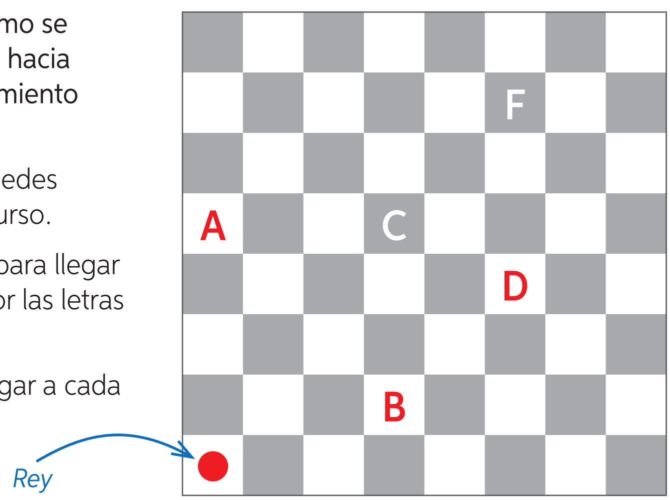
   d. Un miembro de la organización propone calendarizar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido entre los dos equipos favoritos se juegue entre las fechas 7 y 9 (ambas inclusive)? Justifica tu respuesta.

9. Se ubica un rey en un tablero de ajedrez, como se muestra. El rey solo puede moverse siempre hacia la derecha o hacia arriba, haciendo un movimiento por vez.

   a. ¿Con qué técnica de conteo estudiada puedes relacionar la situación? Comenta con tu curso.

   b. ¿Cuántos movimientos se deben realizar para llegar a cada una de las posiciones indicadas por las letras en el tablero?

   c. ¿De cuántas formas distintas se puede llegar a cada posición marcada?



Para concluir

a. Inventa una situación que se pueda resolver aplicando una combinación con repetición.

b. ¿Qué diferencia existe entre una combinación con repetición y una variación con repetición?

c. ¿En qué situación de la vida real se aplican las permutaciones sin repetición?

127 a 129

Antes de continuar

El juego de Keeler

Materiales:
- Carnet de identidad de cada integrante del grupo, pase escolar o tarjeta de identificación.

Este juego de combinaciones se realizará en grupos de 8 personas. Comienzan realizando la actividad seis personas, mientras las otras dos estarán registrando el proceso realizado.

El juego consiste en un intercambio de identificaciones según los pasos establecidos a continuación.

PASO 1: Los 6 participantes escogidos se ubican alrededor de una mesa. Ubican su carnet de identidad frente a ellos. Por turno, intercambian su identificación con un compañero.

a. ¿De cuántas formas posibles podrían haber realizado este intercambio?

PASO 2: Cuando ya nadie tenga su carnet, deberán intentar recuperarlo. Para esto, deben seguir solo una regla: "No pueden intercambiar nuevamente con quien ya lo hayan hecho".

b. ¿Fue posible para todos obtener de regreso su identificación?

c. ¿Con qué problemática se encontraron en el proceso de recuperación?

d. ¿Cuántos movimientos les fue posible realizar?

PASO 3: Se suman al juego las otras 2 personas que comienzan con su propio carnet. Comiencen el juego intercambiando las identidades hasta recuperar cada uno su carnet.

e. ¿Después de cuántos movimientos pudieron recuperar sus identificaciones?

f. Calcula todas las combinaciones posibles que podrían darse en tu grupo.

Reflexiono

a. ¿Qué dificultades tuvieron durante la realización del juego? ¿Cómo las superaron?

b. Comenta con tu grupo:
- ¿Fue tu actitud la adecuada durante la actividad?
- ¿Cómo evaluarías tu participación en la actividad?
- ¿Cuál fue la importancia del trabajo grupal para llegar a las respuestas?

130 y 131

Lección 11

Variable aleatoria

Definición de variable aleatoria

¿Qué es el dominio y el recorrido de una función? Explica con tus palabras.
¿Qué es la probabilidad experimental? ¿Qué es la probabilidad teórica?

Objetivo: Definir y aplicar el concepto de variable aleatoria asociado a un experimento.

1. ◆ Analiza la siguiente situación:

En un minimercado existen tres cajas abiertas para atender a los clientes. Se realiza un experimento aleatorio que consiste en observar qué cajas están ocupadas.

a. ¿Qué técnica de conteo te permitirá saber el número de combinaciones de cajas disponibles?

b. ¿De cuántas formas distintas pueden encontrarse los estados de disponibilidad de una sola caja? ¿Y de tres cajas?

c. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con el número de combinaciones que determinaste anteriormente

Combinación	Caja A	Caja B	Caja C	Número de cajas ocupadas
1	Desocupada	Desocupada	Desocupada	0
2	Desocupada	Desocupada	Ocupada	1
…	…	…	…	…

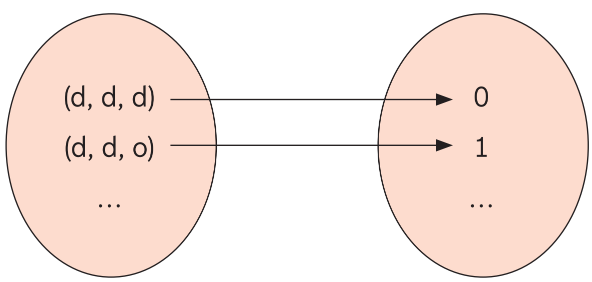
d. ¿Cuántas cajas, como mínimo, pueden encontrarse ocupadas? ¿Puede existir un número de 4 cajas ocupadas? ¿Por qué? Explica.

e. ¿Cuáles son todas las posibles cantidades de cajas ocupadas que se pueden encontrar en el supermercado?

f. En una observación se encontraron dos cajas ocupadas en total. ¿Se puede saber exactamente cuáles fueron esas cajas?

g. Completa el siguiente diagrama en tu cuaderno:

Puedes utilizar "d" para desocupada y "o" para ocupada.



◆ Si el diagrama representara una función, ¿cuáles serían los elementos del dominio? ¿Cuáles serían los elementos del recorrido de la función?

Recuerda que el dominio son los elementos de entrada de una función y recorrido los de salida.

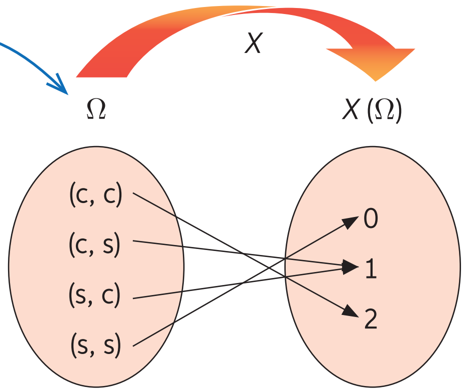
Llamamos variable aleatoria discreta a la función X que asigna un único número real a cada suceso del espacio muestral (Ω) de un experimento aleatorio. Es decir:

$$X: \Omega \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$$

La variable aleatoria nos permite centrar la atención en alguna característica común que tengan los elementos del espacio muestral que sea de nuestro interés, más que los resultados mismos del experimento aleatorio.

Por ejemplo, para el lanzamiento de dos monedas, el espacio muestral es Ω = {cc, cs, sc, ss} y la variable aleatoria X: cantidad de caras obtenidas en el experimento. Entonces:

"Recuerda que el espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio."



Posibles resultados (Ω)	Cantidad de caras $X(\Omega)$
cc	2
cs	1
sc	1
ss	0

El recorrido de la función es X = {0, 1, 2}. Estos elementos se denotan como x_i.

En la actividad 1, ¿cómo se define la variable aleatoria X? ¿Qué valores toma?

2. Un gimnasio realiza un estudio acerca de la variable Z: masa corporal (en kg) de sus socios.

a. ¿Qué valores podría tomar la variable aleatoria masa corporal de un socio del gimnasio?

b. ◆ ¿Qué diferencias hay entre esta variable y la variable definida en la actividad anterior?

c. ◆ ¿Crees que es posible contar los elementos que pertenecen al recorrido de la variable Z? ¿Y los elementos del recorrido de la variable Z?

d. ◆ ¿Qué dificultades tienes al contar los elementos del recorrido de alguna de las dos variables? Explica.

¿A qué conjunto númerico pertenecen los elementos de la variable aleatoria?

Una variable aleatoria discreta se puede clasificar de acuerdo con su recorrido. Si su cantidad de elementos es numerable y finita, se la llama **variable aleatoria discreta finita**. En caso contrario, corresponde a una **variable aleatoria discreta infinita**. Por otro lado, si su recorrido es un intervalo de números reales, la **variable aleatoria es continua**.

Por ejemplo, una variable finita es la cantidad de empleados que trabajan en una tienda, mientras que el tiempo de espera por un pedido es una variable continua.

3. Anota el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios. Luego, identifica la variable aleatoria involucrada y su recorrido.

a. Lanzar el dado y anotar la cantidad de divisores que tiene el número obtenido.

b. Extraer dos papeles simultáneamente y contar las consonantes obtenidas.

Las posibles letras son:

c. Lanzar las dos fichas de la imagen y anotar la suma de sus resultados.

d. Extraer de la tómbola dos bolas de forma simultánea y anotar la suma entre los números obtenidos.

4. Clasifica las variables aleatorias de los siguientes experimentos según sea finita o infinita. Discutan sus respuestas en parejas.

a. Lanzar 6 monedas y anotar el número de caras obtenidas.

b. Lanzar un dado de doce caras y registrar los divisores del resultado obtenido.

c. Registrar el tiempo que demora un cliente en ser atendido en una bencinera.

d. Lanzar un dado de cuatro caras y anotar los múltiplos del resultado obtenido.

5. Observa el siguiente experimento aleatorio. Luego, responde las preguntas.

De una caja que contiene 2 monedas de \$100 y 2 de \$500, se seleccionan 3 de ellas al azar y sin reemplazo.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. Se define la variable aleatoria como X: monto total de las tres monedas. ¿Cuál es su recorrido?

c. Representa la función de la variable aleatoria X en un diagrama sagital.

Para concluir

a. ◆ Explica tu procedimiento para resolver la actividad 5. ¿Qué pasos fueron claves?

b. ◆ ¿Qué estrategia utilizaste para determinar el número de elementos del espacio muestral para experimentos de extracción sin reemplazo?

132 a 135

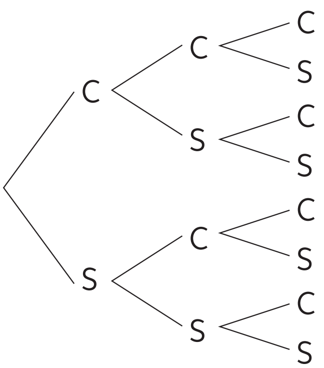
Probabilidad de una variable aleatoria

¿Qué es una variable aleatoria discreta?
¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?

Objetivo: Calcular la probabilidad de una variable aleatoria discreta.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

Se realiza el experimento aleatorio de lanzar las siguientes 3 monedas al aire y se anotan los resultados de cara o sello:



Puedes ayudarte con un diagrama de árbol.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento aleatorio? ¿De cuántos elementos se compone?

b. Se define la variable aleatoria X: número de sellos obtenidos. ¿Cuáles son los valores del recorrido x_i de la variable aleatoria X? Anótalos.

c. ◆ ¿Cuál es la cantidad de casos favorables que tiene cada valor del recorrido de la variable? Construye una tabla para ayudarte.

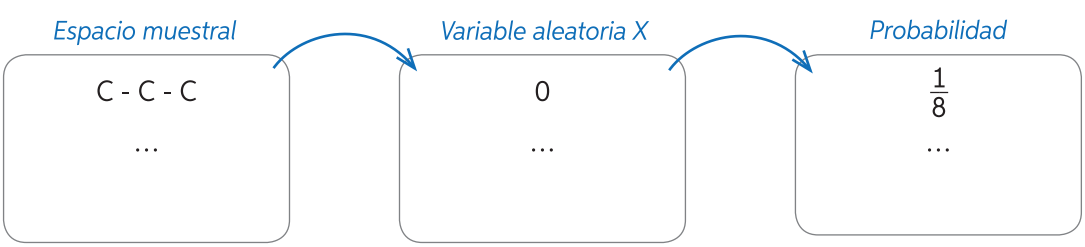
d. ◆ ¿Cómo calcularías la probabilidad de obtener cada elemento del recorrido de la variable? Explica.

e. Calcula la probabilidad de obtener cada elemento del recorrido de la variable.

f. ◆ ¿Existen valores de x_i con la misma probabilidad? ¿Cómo lo explicarías?

g. ◆ ¿Cuál es el resultado de la suma de todas las probabilidades que calculaste anteriormente? ¿Cómo explicarías ese resultado?

h. Completa el diagrama sagital en tu cuaderno:



i. ◆ La relación que existe entre la variable aleatoria y las probabilidades obtenidas ¿es una función? Justifica tu respuesta.

Sea X una variable aleatoria discreta de recorrido $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se denomina **función de probabilidad** a:

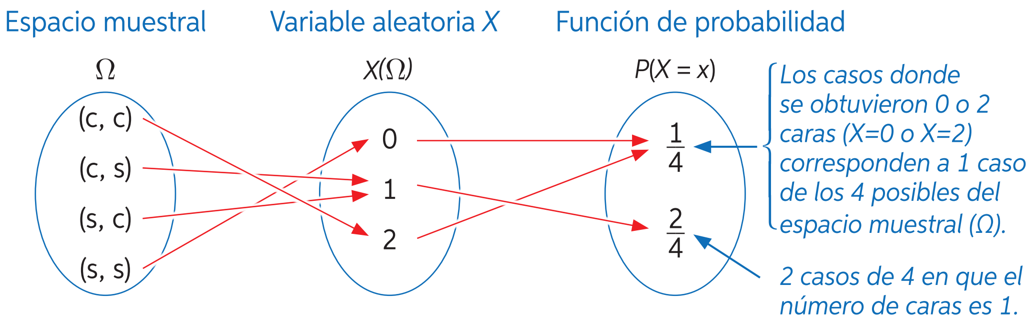
$$f\colon X \longrightarrow [0, 1]$$
$$x_i \longrightarrow f(x_i) = P(X = x_i)$$

Esto quiere decir que a cada elemento de la variable aleatoria x_i, f le asigna su probabilidad correspondiente $f(x_i)$, también anotada como $P(X = x_i)$. De esta manera se obtiene:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i) = P(X = X_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i) = 1$$

Por ejemplo:

Experimento: Lanzamiento de dos monedas.



Obteniendo así:

$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$ $\qquad$ $f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$

Es importante recordar que la probabilidad de un suceso siempre es un número real comprendido entre 0 y 1, ambos incluidos.

¿De qué maneras expresaste la función de probabilidad en el ejercicio anterior?

2. Se realiza el lanzamiento de dos dados de seis caras. Se define la variable aleatoria X: cantidad de números primos obtenidos en los dos dados.

a. ¿Cuál es la cantidad de elementos que contiene el espacio muestral? Anota los posibles resultados del experimento en tu cuaderno.

b. ¿Cuáles son los valores que toma el recorrido de la variable aleatoria X?

c. Determina las probabilidades asociadas a cada elemento del recorrido de la variable.

3. Se escoge al azar un día de la semana.

a. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento?

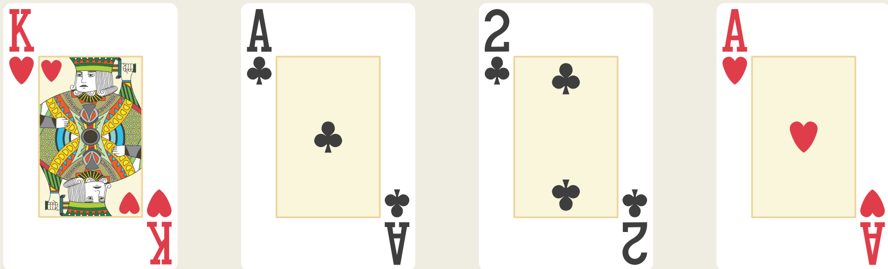
b. Se define la variable aleatoria X: cantidad de consonantes contenidas en el día de la semana elegida. Determina el recorrido de X.

c. Calcula las probabilidades para cada valor del recorrido de X.

4. Define la función de probabilidad para cada situación y calcula su probabilidad. Guíate por el ejemplo.

Experimento aleatorio: Elegir al azar dos de las siguientes cartas.

Variable aleatoria X: Número de ases extraídos en el experimento.



PASO 1: Escribe todos los elementos que conforman el espacio muestral.

Ω = {(K♥, A♥), (K♥, A♣), (K♥, 2♣), (2♣, A♥), (2♣, A♣), (A♥, A♣)}

PASO 2: Completa la tabla con los posibles resultados.

Posibles resultados (Ω)	Cantidad de Ases $X(\Omega)$
(K♥, A♥)	1
(K♥, A♣)	1
(K♥, 2♣)	0
(2♣, A♥)	1
(2♣, A♣)	1
(A♥,A♣)	2

PASO 3: Anota el recorrido de la variable.

$X = \{0,\ 1,\ 2\}$

PASO 4: Define la función de probabilidad para cada valor del recorrido de la variable.

$P(X = 0) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(X = 1) = \frac{4}{6}$ $\qquad$ $P(X = 2) = \frac{1}{6}$

a. Lanzar un dado de 4 caras y uno de 6 caras y anotar la cantidad de números pares obtenidos.

b. Extraer tres bolitas simultáneamente de una urna que contiene 4 bolitas blancas, 3 rojas y 2 negras. Anotar la cantidad de bolitas rojas extraídas.

5. Se escoge al azar un mes del año.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. ◆ Crea una variable aleatoria Z para el experimento y determina la probabilidad de cada una.

6. ◆ Se define la variable aleatoria Y como la suma entre dos números enteros distintos seleccionados al azar entre el –4 y el 2 (ambos incluidos).

a. ¿Cuáles son los posibles valores de la variable aleatoria Y?

b. ¿Cuál es el valor de $P(Y = -3)$?, ¿y de que sea menor o igual a –5?

7. ◆ Se estudian la cantidad de atrasos de los estudiantes durante una semana.

Variable X: cantidad de atrasos durante una semana.

Cantidad de atrasos (x_i)	0	1	2	3	4	5
Probabilidad $P(X = x_i)$	0,20	0,25	0,05	k	0,15	0,10

a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria X?

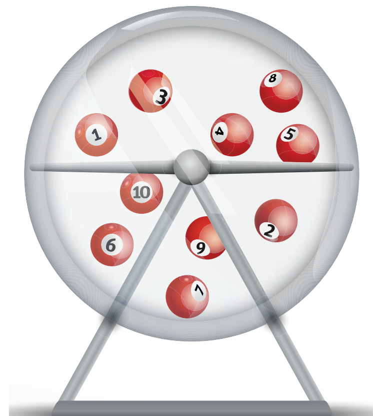
b. ¿Qué representa el valor 0,1?

c. ¿Cuál es el valor de k? ¿Por qué? Comparen sus respuestas en parejas.

d. Se escoge al azar a un estudiante.¿Qué valores de x_i se deben considerar para calcular la probabilidad que este haya tenidos a lo más 3 atrasos?

e. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 3)$?

8. Se extrae 3 veces sin reposición una bolita de una tómbola con bolitas numeradas del 1 al 10. Se define la variable X: cantidad de veces que se selecciona un número par.



a. ¿Cuál es el recorrido de la variable?

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer al menos una bolita con número par?

c. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con los valores correspondientes:

x_1 corresponde al primer valor de la variable aleatoria y $P(X=x_1)$ a su probabilidad.

Cantidad de números pares (x_i)	x_1	…	x_n
Probabilidad $P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	…	$P(X = x_n)$

Actividades de profundización

9. ◆ Considera las siguientes variables aleatorias asociadas a experimentos diferentes.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} a\,;\ \text{si } x_i = 1 \\ b,\ \text{si } x_i = 2 \\ 0{,}6\,;\ \text{si } x_i = 3 \end{cases} \qquad P(Y = y_i) = \begin{cases} 2a;\ \text{si } y_i = 1 \\ b;\ \text{si } y_i = 2 \\ 0{,}3;\ \text{si } y_i = 3 \end{cases}$$

a. ¿Cuáles son los valores de a y b?

b. ¿Cuál es el valor de $P(X \geq 2)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(Y \geq 2)$?

Para concluir

a. Explica con tus palabras lo que entiendes por función de probabilidad. Entrega un ejemplo.

b. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver la actividad 9?

136 a 139

Gráfica de la distribución de una función de probabilidad

¿Qué es una función de probabilidad?
¿Cómo se puede representar?

Objetivo: Representar gráficamente la función de distribución de una variable aleatoria.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

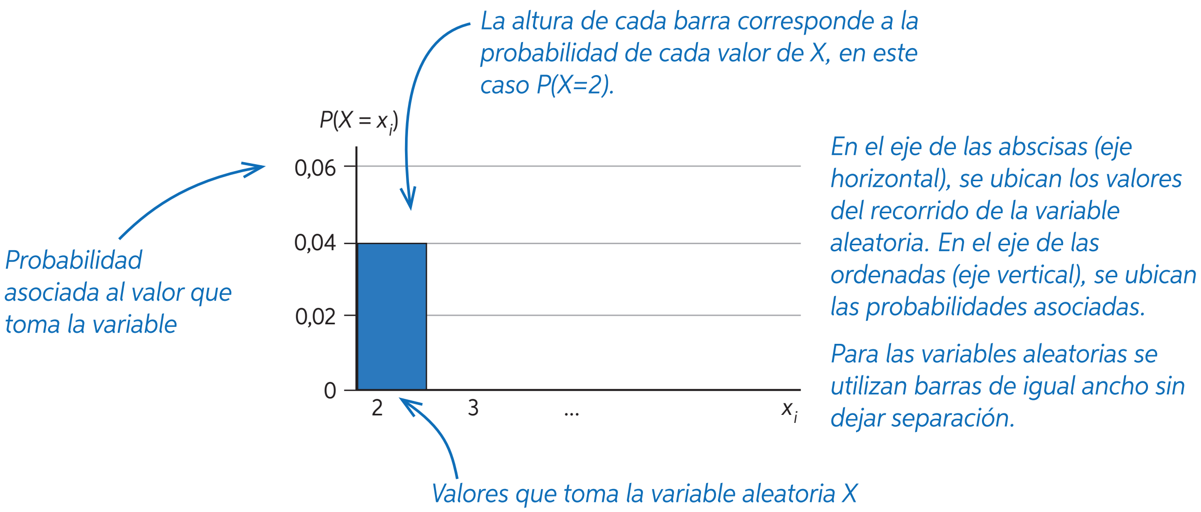
Se gira la ruleta de la imagen dos veces y se anotan los números obtenidos.

a. ¿Cuáles son los elementos del espacio muestral?

b. Se define la variable aleatoria *X*: suma de los números obtenidos al girar la ruleta dos veces. ¿Cuál es el recorrido de la variable?

c. Calcula la probabilidad para cada valor que toma la variable y escribe su función de probabilidad.

d. Completa en tu cuaderno el gráfico de barras para los valores obtenidos en *c*.



e. Calcula la probabilidad de que X sea:

- A lo más 2.
- A lo más 3.
- A lo más 4.
- A lo más 5.
- A lo más 6.
- A lo más 7.
- A lo más 8.
- A lo más 9.
- A lo más 10.

f. Construye un gráfico que muestre las probabilidades obtenidas en la actividad anterior. Ubica los valores del recorrido de la variable en el eje de las abscisas. En el eje de las coordenadas, ubica las probabilidades calculadas anteriormente.

g. ◆ ¿Qué diferencias y similitudes hay entre los dos gráficos que construiste?

h. ◆ ¿Cuál es el valor de la probabilidad de $P(X \leq 10)$? ¿Cómo lo explicarías?

Sea X una variable aleatoria, es posible definir la función de distribución como:

$$P(X \leq x_i) \text{ o } F(X)$$

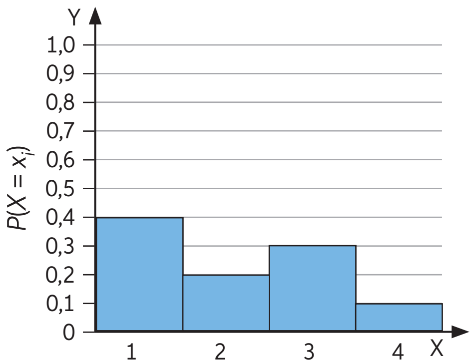
Una función de distribución de una variable aleatoria discreta corresponde a la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor determinado de la variable. En otras palabras, corresponde a su probabilidad acumulada.

Para graficar la función de probabilidad o la función de distribución, se debe considerar:

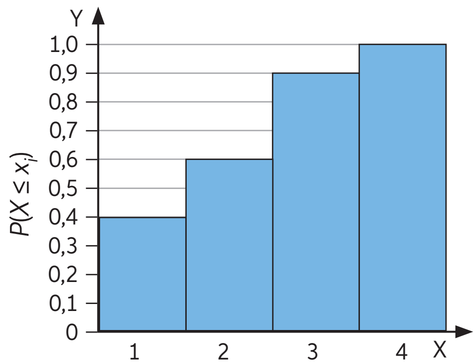
- En el eje de las abscisas, se ubican todos los posibles valores de la variable aleatoria X.
- En el eje de las ordenadas, se ubican las probabilidades.
- Se deben utilizar gráficos de barra de igual ancho.

Observa los ejemplos:

Función de distribución de la variable X.



Función de probabilidad de la variable X.



2. Para las siguientes variables aleatorias, construye el gráfico correspondiente a la función de probabilidad.

a.

Variable aleatoria x_i	1	2	3	4	5
Probabilidad $P(X = x_i)$	0,15	0,05	0,25	0,10	0,45

b.

Variable aleatoria x_i	2	4	6	8
Probabilidad $P(X = x_i)$	0,25	0,35	0,15	0,25

3. La siguiente función de probabilidad de la variable aleatoria X: "número de mascotas que tiene una familia en cierta ciudad del país", se muestra en la siguiente tabla:

Número de mascotas x_i	0	1	2	3
Probabilidad $P(X = x_i)$	0,05	0,45	0,15	0,35

a. Construye una tabla para la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

b. Construye un gráfico para la función de probabilidad de X. Luego, construye otro para la función de distribución de probabilidad.

c. ◆ Se escoge al azar una familia. ¿Cuál es la probabilidad de que esta tenga al menos 1 mascota? ¿Y que tenga a lo más 2 mascotas?

4. Escribe la función de probabilidad y de distribución de probabilidad de las siguientes situaciones.

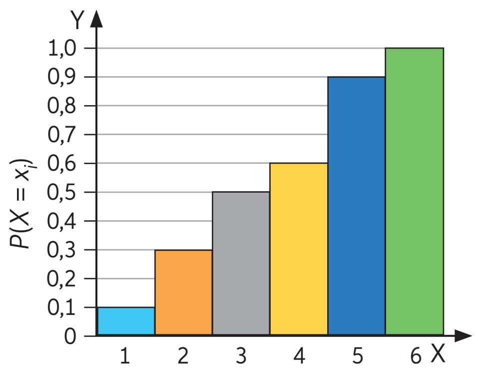
   a. Cantidad de números impares obtenidos al lanzar 4 veces seguidas un dado.

   b. Número de caras al lanzar 5 veces seguidas una moneda.

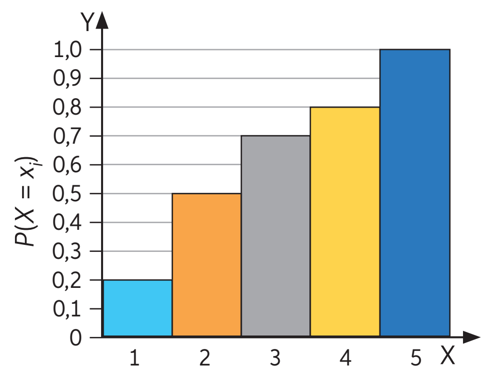
   c. Número de extracciones necesarias para obtener una bolita verde al sacar sin reposición de una caja que contiene una bolita roja, verde, azul y blanca.

5. Determina la función de probabilidad correspondiente a cada gráfico de función de distribución de la variable aleatoria.

a.

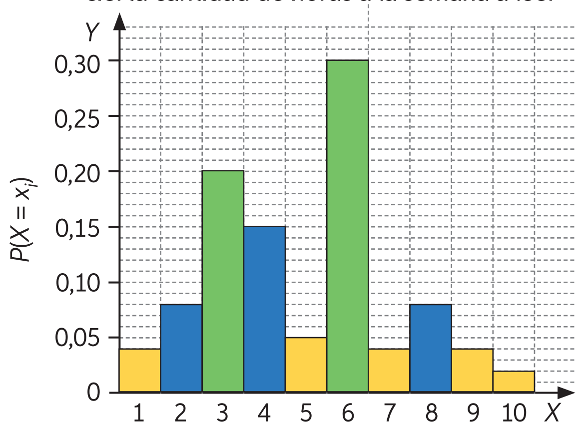


b.



6. ◆ En el siguiente gráfico se tiene la probabilidad de la variable *X*: cantidad de horas a la semana destinadas a leer por un estudiante. Analiza y responde..

Probabilidad de que un estudiante dedique cierta cantidad de horas a la semana a leer



   a. Se escoge un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este destine 3 horas a leer?

   b. Utilizando una tabla, determina la probabilidad acumulada de la variable aleatoria.

   c. Construye el gráfico de la función de distribución de la variable aleatoria.

   d. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiantes que destine a lo más 6 horas a la lectura?

   e. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiantes que lea entre 4 y 8 horas (ambas inclusive)?

   f. ¿Qué estrategias podrías utilizar para calcular la probabilidad anterior? Menciona al menos dos formas diferentes y compártelas con tu curso.

7. ◆ En una empresa que fabrica teléfonos celulares, se estudia la cantidad de fallas de los equipos. Se define la variable X: cantidad de fallas que tiene cierto modelo.

Cantidad de fallas (x_i)	0	1	2	3	4	5
Probabilidad $P(X = x_i)$	0,41	0,10	0,12	0,20	0,13	0,04

a. Si se selecciona al azar uno de los equipos, ¿cuál es la cantidad de fallas menos probable de obtener? ¿Cuál es la cantidad más probable de fallas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo más 3 fallas en un teléfono?

c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un teléfono que tenga 2 a 4 fallas?

d. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un celular que tenga más de 2 fallas, pero menos de 4?

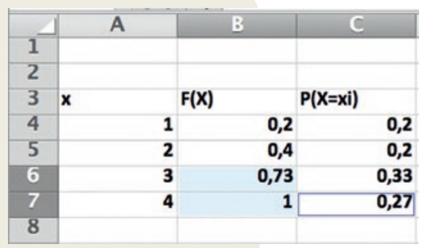
8. Determina las funciones de probabilidad a partir de las funciones de distribución. Luego, constrúyelas en una hoja de cálculo.

Paso 1: En una hoja de cálculo, ingresa los valores de la variable aleatoria X. En la columna siguiente ingresa los valores de la función de distribución $F(X)$.

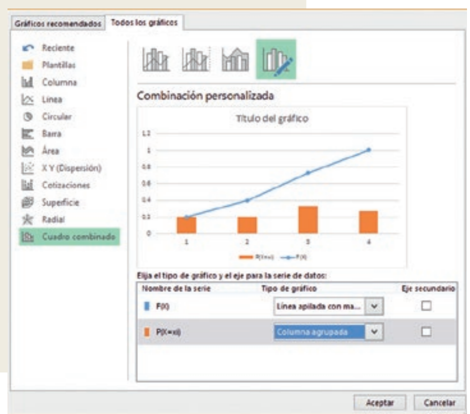
Paso 2: Para calcular la función de probabilidad, escribe en la última de la tercera columna "=". Luego, selecciona la celda adyacente de la segunda columna y réstale la celda superior.

Paso 3: Copia la fórmula hacia arriba, excepto para el dato de la primera fila, que se copia directamente de $F(X)$

Paso 4: Selecciona los datos de $F(X)$ y $P(X=xi)$ y presiona en INSERTAR>GRAFICOS. Luego, en el menú de gráficos, selecciona "Todos los gráficos" y después "Cuadro combinado". Modifica $F(X)$ como línea apilada y $P(X=xi)$ como columna agrupada.



	A	B	C
1			
2			
3	x	F(X)	P(X=xi)
4	1	0,2	0,2
5	2	0,4	0,2
6	3	0,73	0,33
7	4	1	0,27
8			



a.

Cantidad de fallas (x_i)	0	1	2	3
Probabilidad $P(X \leq x_i)$	0,275	0,425	0,855	1

b.

Cantidad de fallas (y_i)	0	1	2	3
Probabilidad $P(Y \leq y_i)$	0,22	0,38	0,92	1

Para concluir

a. ¿Qué diferencias hay entre una función de probabilidad y una función de distribución acumulada? Explica usando tus palabras.

b. ¿Qué diferencia tiene la probabilidad experimental y la función de probabilidad? Explica usando tus palabras.

140 a 143

Antes de continuar

1. Escribe tres ejemplos diferentes para:
   a. Variable aleatoria discreta .
   b. Variable aleatoria continua.

2. Se lanza dos veces un dado cargado, de manera que los números pares tienen el doble de probabilidad de salir que los impares. Se define la variable aleatoria X: producto de los números obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener un número menor que 12.

3. Se lanza un dado de ocho caras, numeradas del 1 al 8. Se define la variable aleatoria que representa si el número obtenido es primo o no. Para esto, se asigna 0 si no es primo y 1 si es primo.
   a. Anota todos los elementos x_i que componen el espacio muestral.
   b. Construye una tabla con los elementos del espacio muestal y el recorrido de la variable aleatoria.
   c. Representa la función de la variable aleatoria a través de un diagrama sagital.

4. Se gira la ruleta de la figura tres veces y se registran los colores obtenidos y los números.
   a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria?
   b. Determina la función de probabilidad para cada variable aleatoria.
   c. Determina la función de distribución para cada variable aleatoria.

Se define las variables:
X: cantidad de colores primarios obtenidos.
Y: cantidad de números impares obtenidos.

5. Considera el experimento aleatorio "lanzar dos dados de 6 caras" y la variable aleatoria X: cantidad de números primos que aparecieron en ambos dados.
   a. Escribe el recorrido de la variable aleatoria.
   b. Calcula la función de probablidad de la variable aleatoria.
   c. Calcula $P(X = 1)$ y $P(X < 2)$
   d. Grafica la función de probabilidad.
   e. Calcula la función de distribución acumulada.

Reflexiono

Explica con tus palabras la diferencia entre el gráfico de función de probabilidad y el gráfico de función de distribución de probabilidad.

144 y 145

Lección

12 Probabilidad en la sociedad

La probabilidad en los medios de comunicación

¿Cuál es el significado de "probabilidad"?
¿Qué quiere decir que una muestra sea aleatoria?

Objetivo: Analizar la información de los medios de comunicación aplicando probabilidades.

1. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Poderosas razones para comer cereales integrales

La alimentación está estrechamente relacionada con la salud. Una dieta rica en grasas, azúcares y sodio eleva el riesgo de sufrir enfermedades no transmisibles, como diabetes, cáncer y cardiovasculares, entre otras. Pero también está la cara opuesta. Alimentos que ayudan a proteger el organismo. Los cereales integrales son uno de ellos, de acuerdo a un reciente trabajo que confirmó que su consumo contribuye a reducir el riesgo de padecer patologías crónicas.

Se trata de un metaanálisis realizado sobre 45 estudios que relacionan una dieta basada en cereales con una mejora en la salud y una reducción en el riesgo de muerte por ataque cerebrovascular (ACV), diabetes, cáncer y problemas respiratorios e infecciosos.

Los resultados arrojaron que consumir 90 gramos de cereales integrales al día reduce en 19 % las probabilidades de padecer enfermedades coronarias y en 22 % las cardiovasculares. A su vez, la mortalidad relacionada con ACV se reduce en 14 %, con cáncer 15 %, con afecciones respiratorias un 22 %, infecciosas en 26 % y con diabetes 51 %.

Los investigadores concluyeron que hasta el momento "las recomendaciones para la ingesta de granos enteros habían sido a menudo poco claras o incoherentes en relación con la cantidad y tipos de alimentos de grano entero que se debían consumir". La evidencia científica recogida por esta exhaustiva revisión permite "apoyar firmemente las recomendaciones dietéticas para aumentar la ingesta de alimentos de grano entero en la población general para reducir el riesgo de enfermedades crónicas y mortalidad prematura", sostuvieron.

No obstante, los investigadores aclararon que el metaanálisis tiene algunas limitaciones relacionadas con la heterogeneidad de estudios revisados y con los diferentes estilos de vida, hábitos alimenticios y nivel social de las personas que participaron de ellos.

Fuente: https://www.clarin.com/buena-vida/salud/poderosas-razones-comer-cereales-integrales_0_SyfgOJjB.html (Adaptación)

a. ¿Cuáles son los datos que entrega la noticia? Anótalos en tu cuaderno.

b. ◆ ¿Qué quiere transmitir la noticia? Discutan en parejas.

c. ◆ ¿Se pueden considerar correctas las siguientes conclusiones? Analiza y justifica.

Conclusión 1: Una persona que no consume granos enteros tiene mayor mortalidad prematura y riesgo de sufrir enfermedades crónicas que una que suele consumirlos.

Conclusión 2: Una persona que consume granos enteros no tiene riesgo de sufrir enfermedades crónicas ni muerte prematura.

Conclusión 3: Una persona que consume granos enteros tiene menor probabilidad de sufrir enfermedades crónicas y muerte prematura que una que no los consume.

d. ◆ Si se realizara este estudio en otra población, ¿se obtendría la misma conclusión? ¿Por qué? Justifica tu respuesta y coméntala con tu curso.

2. Analiza la siguiente noticia y responde.

El lado solidario de Chile: uno de cada cuatro jóvenes realiza voluntariado

Uno de cada cuatro jóvenes realiza trabajos de servicios comunitarios de forma voluntaria. Esa es una de las conclusiones que arroja la IX Encuesta Nacional de la Juventud, estudio desarrollado durante 2018 para conocer diversas temáticas que involucran a este grupo.

Según los resultados del apartado que aborda el tema del voluntariado, el promedio de jóvenes que realizan estas actividades se mantiene bordeando el 28 % y las mujeres participan levemente más en estos trabajos (29,1 %) que los hombres (26,5 %).

Los jóvenes expresaron, en su mayoría, que realizan trabajos de voluntariado por temas vocacionales (35,1 %) y para adquirir experiencia (12,3 %). A su vez, son las regiones de los extremos del país las que concentran la mayor proporción de voluntarios.

La IX Encuesta Nacional de la Juventud 2018 evidencia que existe una diferencia de participación de los jóvenes en estas actividades según su situación socioeconómica (35 % de jóvenes de ingresos altos versus el 25,4 % de ingresos bajos) y según viva en zonas urbanas (28,5 %) o rurales (23,1 %).

Asimismo, junto con el voluntariado, esta encuesta abordó los lugares donde los jóvenes realizan actividades de participación política: el 17,9 % lo realiza en el club deportivo; el 16,7 % en la comunidad o con grupos virtuales y el 7,2 % en federaciones de estudiantes.

La IX Encuesta Nacional de la Juventud se aplicó en todas las regiones a una muestra aproximada de 9 700 jóvenes de entre 15 y 29 años.

Fuente: https://www.latercera.com/nacional/noticia/lado-solidario-chile-uno-cuatro-jovenes-realiza-voluntariado/818039/ (Adaptación)

a. Se selecciona un joven de entre 15 y 29 años. Según el texto, ¿cuál es la probabilidad de que éste realice un voluntariado?

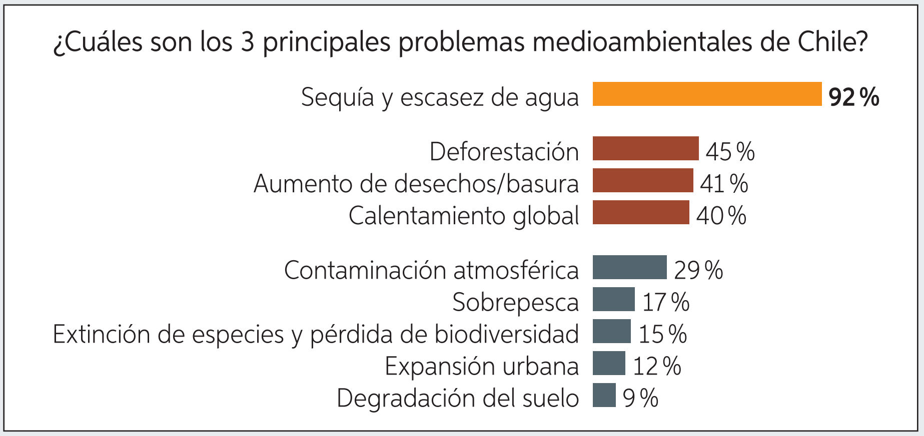
b. ¿Cuál es el total de jóvenes de entre 15 y 29 años que realiza voluntariado?

c. ◆ ¿Cómo calculaste lo pedido en la pregunta anterior? ¿Qué datos utilizaste?

Para analizar correctamente la información de los medios de comunicación, es importante que conozcas los conceptos de estadística y probabilidad. Si no tienes claridad respecto de ellos, puedes llegar a conclusiones erradas.

3. ◆ Analiza los siguientes datos. Luego, realiza las actividades.

Un estudio de la empresa GFK Adimark consultó en 2019 acerca de las preocupaciones de la gente relacionadas con la crisis ambiental. Las respuestas fueron las siguientes.



Fuente: https://www.gfk.com/en-gr/insights/press-release/crisisambiental-gfk-dic2019/

a. Se elige al azar a una persona encuestada. ¿Cuál es la probabilidad de que se manifestara preocupada por la deforestación?

b. Se elige al azar a una persona encuestada. ¿Cuál es la probabilidad de que se manifestara preocupada por la expansión urbana?

c. ¿Cuál es la preocupación menos recurrente?

4. Reúnanse en grupos de 3 a 4 integrantes. Busquen investigaciones y artículos que se relacionen con probabilidad. Luego, realicen las actividades.

a. Identifiquen la temática con la que se relaciona el artículo y las probabilidades.

b. ¿De qué se trata el artículo? Realicen un resumen con las ideas más importantes.

c. ¿Qué conclusiones erróneas podría asumir una persona que desconoce sobre conceptos probabilidad? Mencionen un ejemplo.

d. ¿Existe algún tipo de manipulación de la información? ¿Con qué propósito creen que se realiza esto en algunos casos? Discutan sus ideas.

e. Expongan su análisis frente al curso e intercambien sus análisis.

Para concluir

a. ¿Es importante conocer conceptos de probabilidad y estadística para leer noticias o estudios? Justifica.

b. Ponte en el lugar de alguien que no sabe de probabilidad y estadística. ¿Qué conceptos le harían más entendible la información de un estudio?

146 a 148

Probabilidad y toma de decisiones

¿Cuál es el rol de la probabilidad en la sociedad?
¿Qué datos y probabilidades consultas en tu día a día?

Objetivo: Aplicar la probabilidad para resolver problemas y tomar decisiones.

1. ◆ Analiza la siguiente información. Luego, responde:

Tres amigos desean invertir su dinero. Para ello pueden elegir entre tres empresas. En la primera, la probabilidad de obtener ganancias es de 30 % y la de perder dinero, de 40 %. En la segunda, la probabilidad de tener ganancias es de 10 % y de perder, 60 %. En la tercera, la probabilidad de obtener ganancias es de 20 % y de perder, 5 %.

a. El primero desea que el riesgo de perder dinero sea el menor posible. ¿En cuál de las empresas debe invertir?

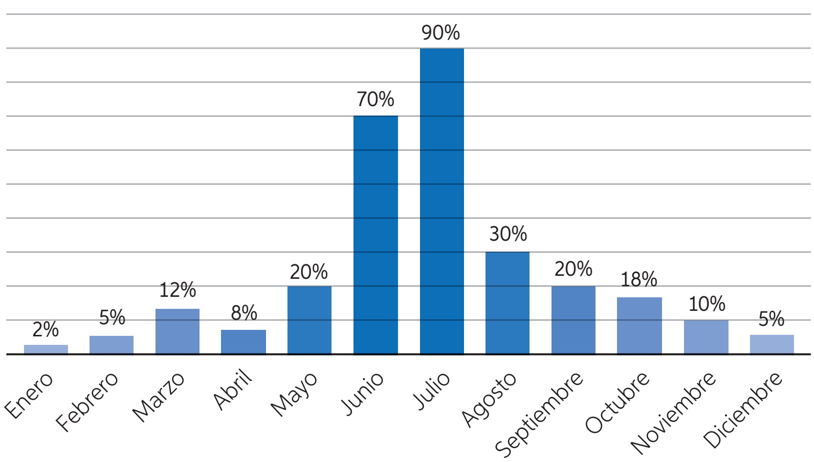
b. El segundo prefiere elegir la empresa con la mayor probabilidad de ganancia posible. ¿Cuál de las tres empresas debiera elegir?

c. El tercero quiere una empresa en la que no se produzca ganancia ni pérdida de dinero. ¿Cuál de las empresas debe elegir?

2. ◆ Analiza la situación. Luego, responde.

El gráfico muestra la probabilidad de que llueva 10 o más días del mes en cierta ciudad. Una empresa de la ciudad, que vende materiales para la construcción, tiene mayores ventas en los meses en los que la probabilidad de lluvia durante 10 días o más es menor que 0,2. Además, en esos meses debe contratar una mayor cantidad de trabajadores. Por otro lado, cuando la probabilidad de lluvia supera 0,6, se generan pérdidas.

Probabilidad de lluvias por mes



a. Según la información, ¿en qué meses es probable que la empresa deba contratar más trabajadores?

b. Los dueños de la empresa deciden cerrar durante los meses que probablemente llueva 10 o más días. ¿Cuántos meses cerrarán?

c. Un análisis de último minuto establece que la empresa generará el triple de ganancias respecto de un mes normal. Esto ocurrirá el tercer mes del periodo en que la probabilidad de que llueva 10 o más días en cada uno de ellos sea inferior a 0,07. ¿En qué mes podría ocurrir esto? Justifica.

En muchas situaciones, las probabilidades permiten valorizar los posibles resultados de estudios estadísticos o análisis de casos. De este modo, facilitan así la toma de decisiones con respecto a determinadas opciones. Observamos muchos de estos casos en diversas áreas: empresarial, económica, forestal, ciencias sociales, entre otras.

3. Se ha realizado una encuesta a usuarios de servicio de importación de materiales eléctricos por Internet. Se les consultó la calidad, la puntualidad y el servicio de posventa de cada empresa. La siguiente tabla muestra las probabilidades asociadas a cada indicador.

	Calidad	Puntualidad	Post venta
Empresa A	0,70	65 %	55 %
Empresa B	78 %	0,58	0,67
Empresa C	75 %	0,80	74 %

a. ¿Qué dificultades podría tener una persona al leer la información de la tabla? ¿Cómo lo solucionarías?

b. ◆ Un cliente quiere comprar materiales eléctricos para una obra que debe estar lista en una fecha determinada. ¿Cuál empresa debería escoger?

c. ◆ A un cliente no le interesa especialmente el servicio de posventa. ¿Cuál empresa es más conveniente? Justifica tu respuesta.

4. ◆ Analiza la siguiente tabla. Luego, responde.

Opciones de inversión ofertadas por un banco						
Monto ($)	Fondo A		Fondo B		Fondo C	
	Probabilidad de ganancias (%)	Probabilidad de pérdidas (%)	Probabilidad de ganancias (%)	Probabilidad de pérdidas (%)	Probabilidad de ganancias (%)	Probabilidad de pérdidas (%)
Desde 100 000 hasta 999 999	14	12	22	19	10	15
Desde 1 000 000 hasta 2 999 999	6	2	5	0,5	7	1
Desde 3 000 000 hasta 6 000 000	12	17	18	9	11	30

a. Se desea invertir $2 500 000. ¿En cuál de los tres fondos es más probables obtener ganancias? ¿En cuál es más probable obtener pérdidas?

b. Se quiere invertir $6 000 000 en un mismo fondo, pero dividiendo el monto en $2 000 000 y $4 000 000. ¿En cuál de los tres fondos conviene hacerlo considerando solamente las probabilidades de obtener ganancias?

c. Se desea invertir $1 500 000, pero se quiere correr un bajo riesgo de pérdidas. ¿Cuál es el fondo más conveniente para hacerlo?

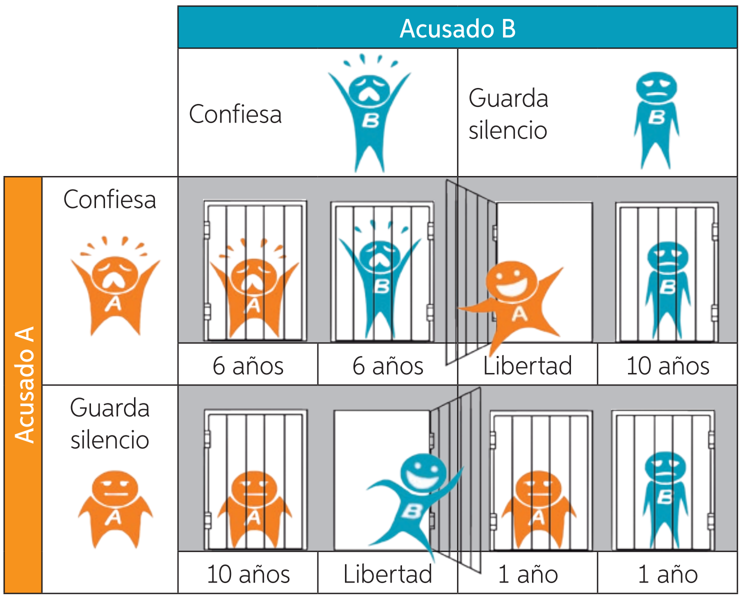
d. Martina quiere invertir un mismo monto en los tres fondos. ¿Entre qué valores es más conveniente hacer esa inversión?

Actividades de profundización

5. El dilema del prisionero consiste en el siguiente problema:

Se interroga a dos sospechosos, pero no hay pruebas suficientes para condenarlos. Después de separados, se les ofrece el mismo trato:

Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el que confiese será liberado. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos por un cargo menor.



a. Se considera equiprobable que un acusado confiese y guarde silencio. ¿Qué probabilidad tiene cada escenario?

b. ◆ Analiza los posibles casos:

I. ¿Cuál de los resultados finales de la situación es más conveniente para ambos?

II. Si uno niega el trato, ¿cuál es el escenario más favorable para el otro?

c. ◆ Debate con un compañero la mejor opción en el dilema del prisionero. Adopten cada uno las posturas a favor de confesar y a favor de guardar silencio. Utilicen las probabilidades calculadas anteriormente para argumentar.

◆ Luego de estudiar el dilema del prisionero, ¿qué opción crees que tiene mayor probabilidad? ¿Cuál es mas conveniente? ¿Por qué?

Para concluir

a. Investiga y comenta a qué situaciones crees que se aplica el dilema del prisionero.

b. ¿En qué situaciones cotidianas utilizas probabilidades para tomar decisiones?

149 a 151

Interpretación de la probabilidad

¿Cuándo se puede utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades?
¿Qué significa que dos sucesos sean equiprobables?

Objetivo: Identificar los tipos de probabilidad presentes en situaciones cotidianas.

1. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Para definir la pareja ganadora de un concurso, esta debe lanzar dos dados gigantes de 4 caras y anotar la suma.

a. ¿Cuál es la cantidad de combinaciones que hay en el espacio muestral?

b. ¿Cuáles son los resultados posibles? Anótalos en tu cuaderno.

c. Si la suma de ambas caras es 2, entonces la pareja obtiene un premio sorpresa. ¿Cuál es la probabilidad de que la pareja obtenga este premio?

d. Si la suma de ambas caras es 8, entonces los jugadores tienen la oportunidad de lanzar los dados otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra ese suceso?

Un experimento se realiza al azar y tiene n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes. Además, si *m* resultados cumplen con el atributo A, la probabilidad de A está dada por la siguiente expresión:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Esta definición, que se conoce como regla de Laplace, corresponde a la **probabilidad clásica.**

Por ejemplo, al obtener un número par de un dado de seis caras se tiene que:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los casos favorables son $A = \{2, 4, 6\}$ donde $m = 3$ y $n = 6$,
por tanto $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Otro de los juegos del concurso es una trivia. Antes de responder las preguntas, los concursantes deben tocar una chicharra. Se sabe que las chicharras están defectuosas y a veces no suenan. Por ello, se decidió estudiar al azar una de ellas.

Número de veces que se tocó la chicharra	Número de veces que la chicharra no sonó	Frecuencia relativa
10	1	$\frac{1}{10} = 0{,}100$
30	3	$\frac{3}{30} = 0{,}100$
50	4	$\frac{4}{50} = 0{,}080$
200	15	$\frac{15}{200} = 0{,}075$
500	39	$\frac{39}{500} = 0{,}078$
1000	78	$\frac{78}{1000} = 0{,}078$

a. ¿Qué sucede con la frecuencia relativa conforme cambia la cantidad de veces que se tocó la chicharra?

b. ◆ Observa lo que ocurre a medida que aumenta la cantidad de veces que se toca la chicharra. ¿A qué valor tiende la probabilidad de que ésta no suene?

La frecuencia relativa de los resultados favorables a A se aproxima al valor de la probabilidad teórica a medida que el número de repeticiones aumenta. Esto se conoce como **probabilidad experimental**.

c. Los productores del concurso dicen que están en un 80 % seguros de que, si el programa cambia de horario, será visto por más gente. ¿En qué se basa la afirmación de los productores? ¿Qué diferencia existe entre esa probabilidad y las que observaste anteriormente?

En muchas afirmaciones la probabilidad puede interpretarse como el grado de creencia con respecto a la ocurrencia de una afirmación. Esto se conoce como **probabilidad subjetiva**. En esos casos, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible.

3. Identifica el tipo de probabilidad en cada situación. Justifica en cada caso.

a. Un estudiante estima que tiene una probabilidad de 0,76 de aprobar un examen.

b. Al lanzar una moneda, hay una probabilidad de 0,5 de que salga cara.

c. Es muy probable que mañana haya mucho tráfico porque comienzan las clases.

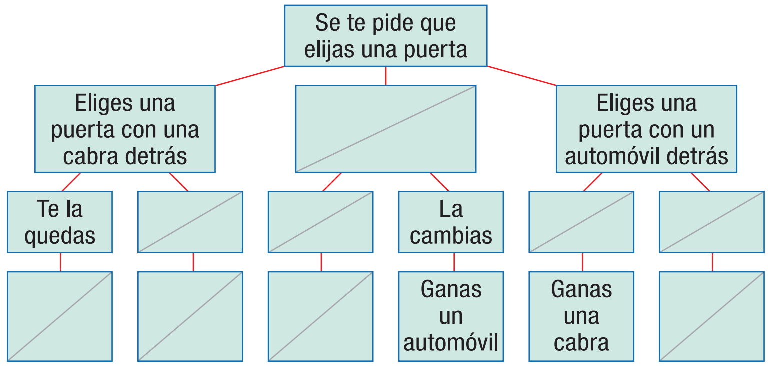
d. Se estima que la probabilidad de tener un accidente en carretera es del 7 % en septiembre de 2021. Esto, considerando los accidentes de septiembre de 2020.

e. Estudios científicos indican que en 20 años más será menos probable que las personas fumen.

4. ◆ El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad inspirado por el concurso televisivo estadounidense *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato). Su nombre proviene del presentador, Monty Hall. En este concurso, el participante escoge una puerta entre tres. Su premio consiste en lo que se encuentra detrás de ella. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida.

Para realizar:
gbit.cl/T21M2MP156A

a. Completa en tu cuaderno el diagrama.



b. ¿Qué decisión crees que es mejor: quedarse con la puerta o cambiarla? Comenta con tu curso.

c. Realiza una simulación del experimento. Para ello anota en una hoja de cálculo:

Paso 1: Escribe lo siguiente:

Puerta 1: En la celda A2: "=Aleatorio()<1/3"
Puerta 2: En la celda B2: "=SI(A2=Falso;Aleatorio()<1/2)"
Puerta 3: En la celda C2: "=NO(O(A2:B2))"
Elección: En la celda D2: "=Aleatorio.entre(1;3)"
Cambiar la puerta: En la celda E2:
"=SI(elegir(D2;A2;B2;C2)=Verdadero;Falso;verdadero)".

Paso 2: Selecciona la segunda columna y cópialo para generar más simulaciones. Agrega en la columna F el conteo.Para ello, escribe: "=CONTAR.SI(E:E,VERDADERO/CONTARA(E:E)-1)" y asígnale

	A	B	C	D	E	F	G
1	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Elección	Cambiar	Aciertos al cambiar	
2	FALSO	FALSO	VERDADERO	1	VERDADERO	100%	
3	FALSO	VERDADERO	FALSO	2	VERDADERO		
4	VERDADERO	FALSO	FALSO	3	VERDADERO		
5							

¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

¿Qué tipo de probabilidad utilizaste en tu respuesta final? Discute en parejas.

Para concluir

a. Proporciona un ejemplo para cada tipo de probabilidad. Argumenta su clasificación en cada caso.

b. ¿Qué estrategia utilizarías para diferenciar la probabilidad experimental de la probabilidad clásica?

152 a 155

¿Cuáles son nuestros hábitos?

En grupos de tres integrantes, discutan sobre la información entregada en cada caso. Luego, respondan.

1. En octubre de 2019, un medio de comunicación dio a conocer esta noticia en relación con los índices de sobrepeso en Chile.
   a. ¿Cuáles pueden ser las causas de estos índices de obesidad en Chile?
   b. Realicen un gráfico que represente la información entregada en la noticia. ¿Qué tipo de gráfico utilizaron y por qué?

Una alarmante realidad se dio a conocer recientemente en nuestro país. Los últimos datos publicados por la OCDE muestran que el 74 % de la población adulta en Chile sufre sobrepeso u obesidad. Esto sitúa a Chile en el país de la OCDE con más alta tasa de obesidad y sobrepeso, por encima de México (72,5 %) y Estados Unidos (71 %).

Fuente: https://www.elmostrador.cl/agenda-pais/2019/10/16/chile-se-convierte-en-el-lider-internacional-de-obesidad-tanto-en-adultos-como-en-ninos/

2. Otro medio nacional, en enero de 2019, dio a conocer los resultados de una encuesta sobre actividad física y deporte.
   a. ¿Cuántas personas realizan actividad física según las recomendaciones de la OMS?
   b. ¿Cómo se relaciona esta información con la relativa a índices de sobrepeso?
   c. Investiga con tus compañeros: ¿Cuáles son las recomendaciones de la OMS en relación con la actividad física?

El **Ministerio del Deporte** dio a conocer los resultados de la **Encuesta Nacional de Actividad Física y Deportes**. Su última versión encuestó a 6025 personas mayores de 18 años a lo largo de todo Chile.

Las cifras dadas a conocer revelaron que el 18,7 % de los encuestados realiza actividad física bajo las recomendaciones de la **Organización Mundial de la Salud** (OMS).

Las cifras confirmaron la tendencia de que la tasa de inactividad de los chilenos ha ido a la baja, pasando de 87,2 % de inactivos en 2006, a 81,3 % 2018. Sin embargo, entre 2015 y 2018 se produjo un estancamiento: apenas un 0,5 de los chilenos mayores de 18 años decidió moverse.

Fuente: http://www.ipsuss.cl/ipsuss/analisis-y-estudios/encuesta-actividad-fisica-y-deportes-solo-dos-de-cada-10-chilenos-hace/2019-01-07/173931.html

3. Elaboren una lista con 3 propuestas para mejorar los hábitos de vida saludable en los estudiantes de su colegio. Realicen un afiche con estas propuestas.

Reflexiono

a. ¿Qué estrategia usas para discriminar entre los distintos tipos de probabilidad de un argumento?

b. ¿En qué otros casos usas probabilidades? Comenta con tu curso.

152 a 155

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

1. Con respecto a los motivos que llevaron a cambiar la forma de las patentes en Chile:
   a. Calcula el total de patentes posibles según la nomenclatura usada entre 1985 y 2007.
   b. Calcula el total de patentes posibles con la nomenclatura actual.
   c. Compara ambos números con la población chilena de la época. ¿Tiene sentido un cambio como el realizado en 2007? Argumenta.
   d. Calcula el total de patentes si solo se utilizaran letras para los 6 caracteres.

2. Calcula y resuelve los siguientes problemas de combinatoria:
   a. En una carrera participan 10 corredores. Calcula de cuántas formas podrían repartirse los 3 primeros lugares.
   b. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los números 2,4,6,8 y 0 si ningún dígito se repite?
   c. Un equipo de básquetbol tiene 5 integrantes. Calcula el total de formaciones que se podrían hacer con 12 jugadores si todos pueden jugar en cualquier posición.

3. Resuelve los siguientes desafíos. Calcula la probabilidad solicitada según corresponda:
   a. Lanzar 2 dados de 6 caras y obtener 2 números 6.

Las formas de identificar los vehículos en Chile han variado con el tiempo.

En 1985, para ordenar el sistema, se decidió que las patentes constarían de 6 caracteres: 2 letras y 4 dígitos.

Posteriormente, en 2008, debido al alto crecimiento del parque automotor, se implementó un cambio que rige hasta hoy. Las patentes consisten en 4 letras y 2 dígitos.

b. En un naipe inglés, sacar dos cartas seguidas y que la primera sea pica y la segunda corazón.

c. Se tiene una caja con 5 pelotas: 3 negras y 2 blancas. Se sacan 2 pelotas una tras otra, sin reposición. ¿Qué color debiese salir primero para que aumente la probabilidad de que la siguiente sea de color negro?

d. Sacar al menos 1 cara al lanzar 4 monedas al mismo tiempo.

e. De la generación 2019 de un colegio, el 60 % reprobó Lenguaje, el 50 % reprobó Historia y el 20 % reprobó ambas asignaturas. ¿Qué probabilidad hay de que, al elegir un estudiante al azar, este haya reprobado Lenguaje o Historia, pero no ambas?

4. Para cada variable aleatoria definida, determina sus valores. Luego, construye una tabla de doble entrada adecuada para sus probabilidades.

a. Lanzar 3 monedas. X corresponde al número de caras obtenidas.

b. Se lanzan dos dados de 6 caras. X corresponde al producto de los números obtenidos.

5. La tabla muestra la función de probabilidad de la variable aleatoria *X*.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,35	0,05	2m

a. ¿Cuál es el valor de *m*?

b. ¿Cuál es el valor de $P(x \geq 3)$

c. Inventa un problema que se represente con los valores de la tabla.

6. En 2013, el New York Times, definió la estadística como "la ciencia de aprender de los datos (o razonar acerca de los datos), la teoría y métodos de extraer información de los datos para solucionar problemas del mundo real, la ciencia de la incertidumbre, la ciencia interdisciplinaria por excelencia, el arte de contar una historia con datos".

a. ¿Qué opinas acerca de esta definición de estadística?

b. ¿A qué tipo de interpretación de la probabilidad corresponde la definición anterior? Explica.

Reflexiono

- ¿Con qué otras asignaturas o contenidos de la Matemática puedes relacionar los contenidos tratados en la Unidad? Comenta en parejas
- ¿Qué dificultades tuviste en la evaluación? ¿Cómo lograste superarlas?

Unidad 1

Síntesis

Números

- ¿Cuáles son los números irracionales?

  Son aquellos cuya representación decimal es infinita no periódica. No pueden ser representados en la forma de fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

- ¿Cómo se define al conjunto de los números reales?

  El conjunto que está formado por la unión de los números racionales e irracionales.

- ¿Cuál es la relación entre raíces y potencias?

  Las raíces enésimas son potencias con exponente racional, tal que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, con n y m números enteros y $m \neq 0$.

- ¿Cuándo se pueden sumar o restar las raíces enésimas?

  Se pueden sumar y restar siempre y cuando sus índices y cantidades subradicales sean iguales.

- ¿Cuáles son las propiedades de las raíces enésimas?

  Sean n y m números enteros positivos.
  - $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
  - $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$
  - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
  - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

- ¿Qué es racionalizar una expresión?

  Es el proceso de encontrar una expresión equivalente a la original, sin raíces en el denominador, a través de la amplificación.

- ¿Qué es un logaritmo?

  Es el número real n, que cumple con $\log_b(a) = n \Leftrightarrow b^n = a$, donde a y b son números reales positivos, con $b \neq 1$.

- ¿Cuáles son las propiedades de logaritmos?

  Sean a, b, c y p números reales positivos, con $b \neq 1$ y $c \neq 1$
  - $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a,\ n \in \mathbb{Q}$
  - $\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c)$,
  - $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c),\ c \neq 0$
  - $\log_b(a) = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)},\ p \neq 1$

Unidad 2

Síntesis

Álgebra y funciones

- ¿Qué es el cambio porcentual?

  El aumento o disminución porcentual de una variable respecto de un valor anterior.

- ¿Cómo se calcula el cambio porcentual constante?

  Con la ecuación recursiva $f(t+1) = I_v \cdot f(t)$, donde t representa el tiempo u I_v representa el índice de variación.

- ¿Qué es una ecuación de segundo grado?

  Es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$. El máximo exponente de la variable es 2.

- ¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado?
  - Factorización
  - Completación de cuadrados
  - Fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática? ¿Cuáles son sus propiedades?

  Tiene 2 soluciones x_1 y x_2 y cumplen que:
  - $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
  - $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

- ¿Cómo se calcula el discriminante de una ecuación? ¿Qué información entrega?

  $$\Delta = b^2 - 4ac$$

  $\Delta > 0$ Soluciones reales distintas
  $\Delta = 0$ Soluciones reales iguales
  $\Delta < 0$ Soluciones no reales

- ¿Qué es la función cuadrática?

  Es una función cuya regla se puede expresar como $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es un intervalo de $\mathbb{R}$.

- ¿Qué características tiene la gráfica de ecuación cuadrática?

  Su gráfica corresponde a una parábola.Esta puede ser cóncava hacia arriba si $a > 0$. También puede ser cóncava hacia abajo si $a < 0$ y el vértice de la parábola indica el valor mínimo o máximo de la función según corresponda.

- ¿Qué es la función inversa?

  Una función denominada f^{-1}, en que "y" es pre imagen de "x", respecto a una ecuación "f", en que cada preimagen x tiene una única imagen "y".

Unidad 3

Síntesis

Geometría

- ¿Qué es un sólido de revolución?

  Es una figura sólida obtenida como consecuencia de hacer rotar una región plana alrededor de una recta.

- ¿Qué es una esfera?

  Un cuerpo geométrico generado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

- ¿Cómo se calcula el volumen de una esfera y el área de su superficie?

  $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

  $A_{\text{superficie}} = 4\pi r^2$

- ¿Qué son las razones trigonométricas?

  Son relaciones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo.

- ¿Cómo se calculan las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo?

  - $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
  - $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
  - $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$

- ¿Qué es un vector?

  Es un segmento de recta orientado que tiene módulo, dirección y sentido.

- ¿Qué es el módulo de un vector y cómo se calcula?

  Es la longitud de un vector $\vec{V} = (x, y)$ y se calcula $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- ¿Cómo se calculan las proyecciones de un vector?

  $V_x = |\vec{V}|\cos(\alpha)$

  $V_y = |\vec{V}|\text{sen}(\alpha)$

Unidad 4

Síntesis

Probabilidad y estadística

- ¿Qué es la combinatoria?

  Son las formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto. Los diferentes tipos son permutación, variación y combinación.

- ¿Cómo se calcula una permutación de un conjunto de n elementos?

  Sin repetición: $P_n = n!$

  Con repetición: $P_p^n = \frac{n!}{p!}$.

- ¿Cómo se calcula una variación de k elementos de un conjunto de n elementos?

  Sin repetición: $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

  Con repetición: $Vr_k^n = n^k$

- ¿Cómo se calcula una combinación de k elementos de un conjunto de n elementos?

  Sin repetición $C_k^n = \binom{n}{k} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$

  Con repetición $Cr_k^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

- ¿Qué es una variable aleatoria?

  Es una función que asigna un valor, usualmente numérico, al resultado de un experimento aleatorio.

- ¿Qué es una variable aleatoria discreta finita?

  Una variable aleatoria discreta es aquella que solo puede tomar un número finito de valores dentro de un intervalo.

- ¿Qué es el recorrido de una variable aleatoria?

  Son los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria.

- ¿Qué es una función de probabilidad?

  Es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor. Se designa $f(x) = P(X = x)$

- ¿Qué es una función de distribución y qué propiedades cumple?

  Es la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor de su dominio, es decir, su probabilidad acumulada $F(x) = P(X \leq x)$.

  - $F(b) - F(a) = P(a < x \leq b)$
  - Si $x_1 \leq x_2$, entonces, $F(x_1) \leq F(x_2)$

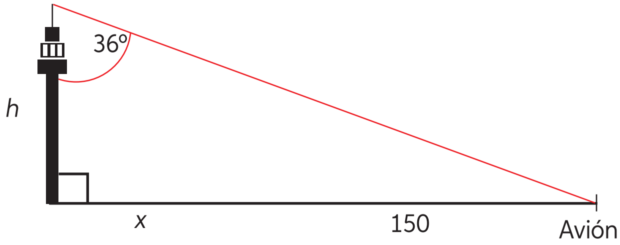
Glosario

A

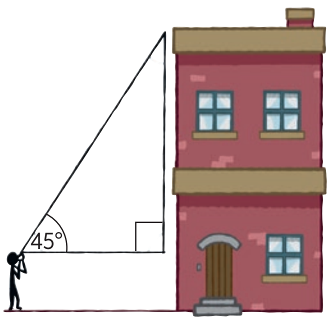
Amplificar: en fracciones, multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo término.

Ejemplo: $\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{20}$

Ángulo de depresión: es aquel ángulo formado por la visual a un punto y la horizontal cuando el punto se encuentra bajo el observador.



Ángulo de elevación: es aquel ángulo formado por la visual de un punto y la horizontal cuando el punto se encuentra sobre el observador.



C

Cateto: lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Codominio: conjunto de llegada de una función.

Conjetura: afirmación que se plantea a partir de la observación de regularidades, con las cuales resulta evidente, pero que aún no ha sido demostrada.

D

Desigualdad: relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es mayor o cuál es menor.

Ejemplo: $4 < 5$

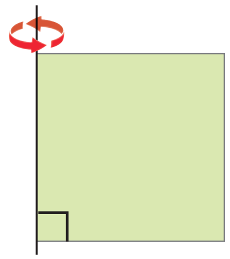
Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

Equiprobabilidad: de igual probabilidad.

G

Generatriz: lado de una figura plana cuya rotación alrededor de una recta fija genera una figura tridimensional.



H

Hipotenusa: lado mayor en un triángulo rectángulo y opuesto al ángulo recto.

I

Identidad: igualdad de expresiones algebraicas que es siempre verdadera para cualquier valor de las variables.

Ejemplo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Inconmensurable: que no puede medirse.

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

P

Parámetros: valores que definen a una expresión determinada.

R

Recorrido: conjunto formado por las imágenes obtenidas al establecer la función.

T

Teorema: proposición matemática que está demostrada.

Tesis: en un teorema o proposición matemática que se debe demostrar a partir de la hipótesis.

V

Variable: cantidad que puede tomar distintos valores.

Ejemplo: la variable $x \in \mathbb{R}^+$ puede tomar cualquier valor mayor a 0.

Volumen: medida del espacio que ocupa un cuerpo.

UNIDAD 1: Números

Página 6

1. 1,61 aproximadamente.
2. 1,625. Es más cercano 55:38

Página 7

3. Respuesta personal.
4. Pregunta de investigación.

Página 8

1.
   a. $x = 3$, número natural.
   b. $x = 1$, número natural.
   c. $x = -5$, número entero.
2.
   a. Finito.
   b. Infinito periódico.
   c. Infinito semiperiódico.
   d. Infinito periódico.
   e. Finito.
   f. Finito.
   g. Infinito periódico.
   h. Infinito periódico.
   i. Finito.
3.
   a. $\frac{41}{5}$
   b. $\frac{12}{9}$
   c. $\frac{173}{33}$
4. 2560 litros.

5.
   a. 1
   b. 0
6.
   a. Verdadero.
   b. Falso, debe estar escrita en paréntesis la base.
7.
   a. $x^2 + 18x + 81$
   b. $9x^4 - 18x^2 - 7$
8.
   a. 2^4
   b. $\frac{2^{96}}{3^{48}}$
   c. $\frac{1}{12^4}$
9.
   a. 32 cm
   b. $a^2 + b^2 \neq (a \cdot b)^2$
10.
   a. 3,1.
   b. −3,6.
11.
   a. 9,91
   b. −0,89

Lección 1

Página 9

1.
   a. Aproximadamente 1,41 cm.
   b. Se obtuvieron muchos decimales. Infinito.
   c. Respuesta variable.

Página 10

2.
   a. No. $\sqrt{4}$ y $\sqrt{16}$ pertenecen a N.
   b. Respuesta variable. Por ejemplo, las raíces enteras se encuentran fuera de Q.
   c. Respuesta personal.
3.
   a. $\mathbb{Q}$
   b. $\mathbb{Q}$
   c. $\mathbb{Q}^*$
   d. $\mathbb{Q}$
   e. $\mathbb{Q}$
   f. $\mathbb{Q}$
   g. $\mathbb{Q}$
   h. $\mathbb{Q}$
4.
   a. Respuesta variable.
   b. Respuesta variable.
   c. Respuesta variable.
   d. Respuesta variable.
5.
   a. Verdadero.
   b. Falso, el cero se puede escribir de la forma $\frac{n}{m}$, para todo $n \in N$.
   c. Verdadero.
   d. Falso, los reales es la unión entre los racionales e irracionales.

Para concluir:

   a. Respuesta variable. Por ejemplo, los irracionales no poseen un patrón de números que se repita.
   b. Respuesta variable.

Página 11

1.
   a. Conservar la raíz y multiplicar las cantidades subradicales. Luego, calculó la raíz cuadrada.
   b. Respuesta variable, por ejemplo usar calculadora.
2. Conservó la raíz y dividió los números correspondientes a la fracción.
3.
   a. $24\sqrt{30}$
   b. 144
   c. $b\sqrt{a}$
   d. $7 + 2\sqrt{10}$
   e. 55
   f. 20
   g. $4 - \sqrt{2}$
   h. $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{25}$

Página 12

4.
   a. Porque la raíz de 4 es un valor exacto.
   b. No se habría podido calcular el valor exacto de las raíces.
5.
   a. $2\sqrt{5}$
   b. $3\sqrt{2}$
   c. $3\sqrt{5}$
   d. $4\sqrt{2}$

e. $4\sqrt{5}$
f. $6\sqrt{3}$
g. $10\sqrt{2}$
h. $7\sqrt{3}$

6.
a. $2\sqrt{2}$
b. $-\sqrt{3}$
c. $-6\sqrt{5}$
d. $-1{,}5\sqrt{2}$
e. $4\sqrt{6} - 6\sqrt{5}$
f. $14\sqrt{5}$

7.
a. $12\sqrt{7}$ cm^2
b. $\sqrt{3}$ m^2
c. 2π cm^2

Página 13

8.
a. $\mathbb{Q}$
b. $\mathbb{Q}$
c. $\mathbb{Q}^*$

9.
a. Falso.
b. Verdadero.
c. Falso.
d. Falso.
e. Falso.

10. P: $8 + 2\sqrt{5}$ cm $\in \mathbb{Q}^*$
A: 8 cm^2 $\in \mathbb{Q}$

Para concluir:
a. El producto de racional e irracional es irracional.
b. Corresponde a un número irracional.

Página 14

1.
a. 1,74
b. 1,41
c. 3,14

2.
a. 2,236
b. 3,317
c. 3,606
d. 4,359
e. 4,899
f. 6,083

Página 15

3.
a. Truncamiento: -13,85 y Redondeo: -13,86
b. Truncamiento: 20,48 y Redondeo: 20,48
c. Truncamiento: 7,07 y Redondeo: 7,07
d. Truncamiento: 15,49 y Redondeo: 15,49
e. Truncamiento: 0 y Redondeo: 0
f. Truncamiento: 2,19 y Redondeo: 2,19
g. Truncamiento: -5,96 y Redondeo: -5,96
h. Truncamiento: -14,85 y Redondeo: -14,86

4.
a. 1,41; E = 0,00421
b. 2,24; E = 0,00393
c. 2,83; E = 0,00157
d. 3,32; E = 0,00337
e. 4,24; E = 0,00264
f. 4,58; E = 0,00257
g. 5,1; E = 0,00098
h. 5,48; E = 0,00277

5.
a. $\sqrt{5} = 2{,}236$; $\sqrt{7} = 2{,}646$; $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 4{,}882$; E = 0,00818
b. $\sqrt{5} = 2{,}24$; $\sqrt{7} = 2{,}65$; $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 4{,}89$; E = 0,00818

Página 16

1.
a. 4,6; $\sqrt{35}$; $4\sqrt{3}$
b. $\frac{4}{8}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$
c. $\frac{39}{20}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$
d. 1,3; $\sqrt{2}$; $\frac{14}{9}$
e. 2,3; $\sqrt{5}$; 2,24
f. $\frac{1}{4}$; 2,087; $\sqrt{10}$

2. $3 > 2 > \sqrt{3} > \sqrt{2{,}5} > \sqrt{2}$

Página 17

3.
b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$, 2 corresponde a $\sqrt{4}$.
c. $2 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$.

4.
a. $\sqrt{58}$
b. $\sqrt{41}$

Para concluir:
a. Usando triángulos rectángulos sucesivos, los valores de los catetos pueden variar. Por ejemplo, 2 y 1 para ubicar $\sqrt{5}$, y $\sqrt{5}4$ para ubicar $\sqrt{21}$.
b. $3 < \sqrt{10} < 4$

Página 18

1. Los números irracionales son aquellos que no se pueden escribir de la forma $\frac{n}{m}$, con n y m enteros y m diferente de cero. Los números reales son la unión entre los irracionales y los racionales.
2. 0 y 13.
3.
   - a. 3,74
   - b. 4,47
   - c. 9,07
4.
   - a. 0
   - b. $2,3\overline{2}\sqrt{5}$
   - c. $2\sqrt{7}$
5.
   - a. $\frac{2}{3}$
   - b. 30
   - c. 6
   - d. −30
   - e. $\frac{7}{5}$
   - f. 12
6.
   - a. 6,08
   - b. Respuesta personal.
7. $\sqrt{8} < 2\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$
8. 24,5.

Lección 2

Página 19

1.
   - a. 1 cm^3.
   - b. Porque el nuevo volumen será la arista elevada al cubo.
   - c. a cm.
   - d. La raíz cúbica del volumen.
2.
   - a. 3
   - b. 3
   - c. −6
   - d. −9
   - e. 3
   - f. 2
   - g. 2
   - h. $\frac{1}{2}$
3.
   - a. Falso.
   - b. Falso.
   - c. Falso.
   - d. Verdadero.

Página 20

4.
   - a. 9
   - b. 9
   - c. 11
5.
   - a. *Menor o igual a 7.*
   - b. Todo valor de *a*.
   - c. Todo valor de *a*.
6.
   - a. Cada hora que pasa, se debe multiplicar la cantidad de organismos por *r*. Cuando no ha pasado ninguna hora, se tienen 3 organismos.
   - b.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Bacterias (cantidad)	3	$3r$	$3r^2$	$3r^3$	$3r^4$	$3r^5$

   - c. $3r^n$
   - d. $r = 2$
7. Respuesta personal.
8.
   - a. −1
   - b. 2
   - c. −1
   - d. 3
   - e. 5
   - f. 1
9. La igualdad no se cumple.
10.
   - a. $6\sqrt{5}$
   - b. $\frac{8}{5}\sqrt{2}$
   - c. $10\sqrt{2}$
   - d. $3\sqrt[3]{3}$

Página 21

11.
   - a. Verdadero:
     $\sqrt[3]{-9}\sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{(-9)(-3)} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$
   - b. Verdadero: $\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{5 \cdot 4} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$
   - c. Falso: $\sqrt[6]{-8}$ y $\sqrt[6]{-2}$ no son números reales.
   - d. Falso: $\sqrt[4]{16 + 81} = \sqrt[4]{97}$
12.
   - a. 9 cm.
   - b. $243\sqrt{5}\pi$ cm^3.
   - c. $\left(6\sqrt{15} + 9\right)\pi$ cm^2.
13.
   - a. También sería positivo. Es una contradicción porque se llega a una igualdad de un número negativo con un número positivo.
   - b. Usando la propiedad de que cualquier número par n se puede escribir como 2k, con k entero. Por lo tanto, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[2]{a}}$ y se puede usar la demostración.

14.

- **a.** Verde: $u\sqrt{7}$, Naranjo: $u\sqrt{3}$
- **b.** $(11 + 2\sqrt{21})\,u^2$
- **c.** $(2\sqrt{21} - 2)\,u^2$

Para concluir

- **a.** Elevando a la enésima potencia.
- **b.** En el caso de n par y una cantidad negativa.

Página 22

1. $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2}$; 7; 7; 7; 7

- **a.** Desde a. hasta d. y desde e. hasta h.
- **b.** 2; 2^2; 2^3; 2^4; 7^2; 7^3; 7^4; 7^5
- **c.** Son fracciones que se pueden simplificar.

2.

- **a.** $\sqrt[5]{6}$
- **b.** $\sqrt[9]{24^5}$
- **c.** $\sqrt{5^5}$
- **d.** $\sqrt[10]{6^{-10}}$
- **e.** $\sqrt[n]{101^3}$
- **f.** $\sqrt[5]{(-4)^4}$
- **g.** $\sqrt[5]{16^2}$
- **h.** $\sqrt{3^{-5}}$
- **i.** $\sqrt[5]{\left(\frac{25}{16}\right)^2}$

3.

- **a.** $6^{\frac{1}{2}}$
- **b.** $3^{\frac{3}{2}}$
- **c.** $9^{\frac{6}{5}}$
- **d.** $2^{-\frac{1}{3}}$.
- **e.** $(-5)^{\frac{3}{n}}$
- **f.** $27^{\frac{1}{12}}$
- **g.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$
- **h.** $\left(\frac{1}{25}\right)^2$
- **i.** $(-3)^{\frac{2}{5}}$

4.

- **a.** Se invirtió la fracción.
- **b.** El signo negativo dentro del exponente.

Página 23

5. Respuesta variable.

6.

- **a.** $\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$
- **b.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{9}{4}}$

7.

- **a.** $T = d^{\frac{3}{2}}$
- **b.**

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Periodo (años)	0,244	0,926	1	2,578	40,844	159,9	770,01	2115,42

- **c.** $d = \sqrt[3]{T^2}$
- **d.** 9 *UA*.

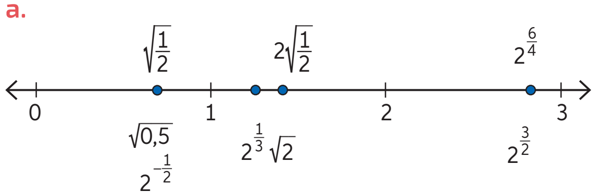
Para concluir:

- **a.** La raíz cuadrada del área dada.
- **b.** Pregunta abierta.

Página 24

1.

- **a.**



- **b.** $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = 2^{-\frac{1}{2}}$; $2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{4}}$
- **c.** $2^{\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$

▶ Pregunta abierta.

▶ Se debe multiplicar por 1 para mantener igualdad, por lo tanto, se debe multiplicar arriba y abajo por el mismo número.

2.

- **a.** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
- **b.** La multiplicación de raíces es la raíz de la multiplicación.
- **c.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

3.

- **a.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- **b.** $\sqrt{7}$
- **c.** $\frac{3\sqrt{8}}{16}$
- **d.** $-\frac{\sqrt{14}}{7}$
- **e.** $\frac{11\sqrt{3}}{18}$
- **f.** $-\frac{1}{4}$
- **g.** $\frac{10\sqrt{(a+3)}}{a+3}$
- **h.** $\frac{13\sqrt{(13-a)}}{13-a}$

▶ Para g. $a > -3$. Para h. $a < 13$.

Página 25

4.

a. Solo cambia el signo.

b. Suma por su diferencia.

c. $4(\sqrt{10} - 3)$

d. $-4(\sqrt{10} + 3)$

El resultado de la suma por su diferencia es siempre la diferencia entre sus cuadrados.

5.

a. $5(\sqrt{2} - 1)$

b. $\frac{9}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

c. $2(\sqrt{13} - \sqrt{10})$

d. $\frac{8}{107}(21 + \sqrt{13})$

e. $\frac{7 + \sqrt{6}}{43}$

f. $\sqrt{2} - 1$

g. $-\frac{\sqrt{14} + \sqrt{5}}{3}$

h. $\frac{7}{5}(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$

i. $-3 - 2\sqrt{2}$

j. $3(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{7} - 3)$

k. $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{3b}}{a - 3b}$

l. $\frac{a(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b})}{b}$

6. En k. *a* y *b* no pueden ser cero simultáneamente. En l. *a* o *b* distinto de cero.

Página 26

7. $2 + \frac{\sqrt{15}}{2}$

8.

a. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

b. $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$

c. $\frac{\sqrt[4]{7^3}}{7}$

d. $2(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

e. $2 - \sqrt{2}$

f. $\frac{5(2\sqrt{6} + \sqrt{2})}{22}$

9.

a. $T = 2\pi\frac{\sqrt{l \cdot g}}{g}$

b. $1{,}41\frac{m}{s}$

Para concluir

a. Respuesta personal..

b. Respuesta personal.

Página 27

1.

a. Para las figuras naranjo, verde, azul y rosado, usando arista 1 cm, tenemos que sus áreas son 34, 30, 24 y 30 cm^2, mientras que sus volúmenes son 8, 9, 6 y 9 cm^3. Usando arista 2 cm, se tiene que sus áreas son 136, 120, 96 y 120 cm^2, mientras que sus volúmenes son 64, 72, 48 y 72 cm^3. Por lo tanto, se mantiene las relaciones.

b. $r = \frac{l_1}{l_2}$, $r^2 = \frac{A_1}{A_2}$, $r^3 = \frac{V_1}{V_2}$

c. $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{A_1}{A_2}$ y $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \frac{V_1}{V_2}$

d. Observando las figuras verde y rosado, con cubos cuyas aristas miden 1 cm. Sus áreas serán 30 cm^2. Por otro lado, si se considera un cubo de arista 3 cm, por lo que su área será 54 cm^2. La razón entre sus áreas es $\frac{9}{5}$.

e. Cuando los cubos tienen arista de 1 cm, el volumen de la figura naranja es 8 cm^3. Por otro lado, si se considera un cubo con arista 3 cm, su área será 27 cm^3. La razón entre sus volúmenes es $\frac{8}{27}$.

Lección 3

Página 28

2.

a. No.

b. No.

c. Em ambos casos es 0. No depende de la base.

Página 29

1.

a. $\log_9 729 = 3$

b. $\log_{0,3} 0,09 = 2$

c. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{32}{243} = 5$

d. $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

e. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

f. $\log_{0,01} 10000 = -2$

g. $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$

h. $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

2.

- **a.** $\frac{1}{2}$
- **b.** 2
- **c.** 6561
- **d.** -2
- **e.** $-0,5$
- **f.** $-\frac{1}{6}$
- **g.** 25
- **h.** 343
- **i.** 0,1

3.

- **a.** 3; 2; 1; −1; 0; 0,301; −0,699; 1,301; 2,301.
- **b.** Respuesta personal.
- **c.** $\log 0,1$ y $\log 0,2$. $\log 1$ y $\log 2$. $\log 10$ y $\log 20$. $\log 100$ y $\log 200$.
- **d.** Todas las potencias de 10 son positivas, ya que es un número positivo.

4.

- **a.** Verdadero, $5^2 = 25$
- **b.** Falso, $2^{0,5} = \sqrt{2} = 1,41$
- **c.** Falso, $9^2 = 81$
- **d.** Falso, $1^0 = 1$
- **e.** Falso, 2^{100} es distinto a 10.
- **f.** Falso, logaritmo de 0 no está definido.
- **g.** Falso, $4^{-2} = 0,0625$
- **h.** Verdadero, $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$
- **i.** Verdadero, $10^5 = 10^5$
- **j.** Verdadero, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$
- **k.** Falso, $8^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8^3}$
- **l.** Verdadero, $\sqrt[3]{64} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

Para concluir:

- **a.** Respuesta variable.
- **b.** No.

Página 30

1.

- **a.** Respuesta variable.
- **b.** $a^1 = 1$. $a^0 = 1$.

▶ Las propiedades para exponente 1 y exponente 0.

2.

- **a.** $(a^n)^m = a^{nm}$
- **b.** Respuesta variable.

3.

- **a.** $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{\log_b a}{n}$
- **b.** $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = \log_b a^{-1} = -\log_b a$

Página 31

4.

- **a.** 3
- **b.** 6
- **c.** 6
- **d.** 6
- **e.** 5
- **f.** 7
- **g.** 4
- **h.** 7
- **i.** 9

▶ $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

5.

- **a.** 1
- **b.** 3
- **c.** 2
- **d.** 3
- **e.** 2
- **f.** 3

▶ Respuesta personal.

Página 32

6.

- **a.** Logaritmo de la suma, logaritmo del exponente.
- **b.** $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$; $a^{n-m} = a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$

7.

- **a.** Los valores $\frac{1}{9}$; 1; 9 y 81 se repiten.
- **b.** Usando el hecho de que $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$.
- **c.**

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{3}$	9
$\log_{\sqrt{3}} x$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

x	$\frac{1}{531441}$	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{81}$	1	81	6561	531441
$\log_{81} x$	−3	−2	−1	0	1	2	3

Hacer $9^x = (\sqrt{3}^4)^x = \sqrt{3}^{4x}$ y $9^x = \left(81^{\frac{1}{2}}\right)^x = 81^{\frac{x}{2}}$

- **d.** $\log_3 10 = 2\log_9 10$
- **e.** $n = \log_4 8$

Página 33

8.

- **a.** Respuesta variable, por ejemplo, primero se aplicó $\log_p x$ en ambos lados, después c pasa a multiplicar por propiedad de logaritmo, se despejó c y, por último, se reemplazó c por su valor original.
- **b.** Son todos los resultados correctos.

9.

- **a.** -3
- **b.** -2
- **c.** $\frac{3}{4}$
- **d.** -5
- **e.** 8
- **f.** -6
- **g.** 18
- **h.** 27
- **i.** $-\frac{10}{3}$

10.

- **a.** $\frac{n}{m}$
- **b.** $\frac{m}{n}$
- **c.** $n+1$
- **d.** $\frac{1}{2}+\frac{n}{4m}$
- **e.** $\frac{3n}{1+n-m}$
- **f.** $m-1$

11. Respuesta variable.

Para concluir:

- **a.** La base debe ser real mayor que 1 o la función se indeterminará en algunos valores.
- **b.** Se puede transformar el logaritmo a base 10.

Página 34

1.

- **a.** 120 dB.
- **b.** $I = 10^{\frac{\beta-120}{10}}\,\frac{W}{m^2}$
- **c.** Respuesta variable.
- **d.** 10 log2

Pregunta abierta, por ejemplo, por posibles daños al oído.

Página 35

2.

- **a.** 6,42
- **b.** 1 y 10^{-14} moles por litro.
- **c.** Respuesta variable.
- **d.** $H^* = 10^{-pH}$. Es la función inversa.

3.

- **a.** $1{,}846\,m^2$
- **b.** $1{,}81\,m$
- **c.** Respuesta variable, por ejemplo,

  $\log a = \log\left(\frac{m^{0,425}\cdot h^{0,725}}{10^{2,144}}\right)$.

4.

- **a.** $T_f = 20 + 160 * 0{,}85^t$
- **b.** 15 minutos aproximadamente.

Página 36

5.

- **a.** Rigel. Meissa.
- **b.** $m = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{l^5}\right) = -\frac{5}{2}\log l$
- **c.** 0,75. Ácrux es menos brillante, ya que Rigel tiene una menor magnitud aparente.
- **d.** Rigel: 0,895. Betelgeuse: entre 0,302 y 0,631. Bellatrix: 0,221. Alnilnam: 0,209. Altinak: 0,175. Saiph: 0,15. Mintaka: 0,128. Meissa: 0,047.
- **e.** En 0,329.
- **f.** 52480636377,15773

Página 37

1. Pregunta variable, por ejemplo, el denominador de la fracción exponente es el orden de la raíz.

2. Pregunta variable, por ejemplo, el exponente de la potencia es el resultado del logaritmo.

3.

- **a.** $\log_3 81 = 4$
- **b.** $\log_2\frac{1}{64} = -6$
- **c.** $\log_5\frac{1}{125} = -3$
- **d.** $\log_{\frac{5}{6}}\frac{3125}{7776} = 5$
- **e.** $\log_{\frac{10}{3}}\frac{1000}{27} = 3$
- **f.** $\log_{\frac{5}{4}}\frac{256}{625} = -4$

4.

- **a.** $8^3 = 512$
- **b.** $7^{-3} = \frac{1}{343}$
- **c.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{81}{16}$
- **d.** $\left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36}$

5.

- **a.** 3
- **b.** 8
- **c.** 16
- **d.** 15625
- **e.** $2\sqrt{2}$
- **f.** $\frac{4}{3}$
- **g.** $\frac{1}{4}$
- **h.** $-\frac{1}{4}$
- **i.** $-\frac{1}{4}$

6.

- **a.** $7-\sqrt{3}$
- **b.** $8+\frac{1}{4}-\sqrt{5}$
- **c.** 1
- **d.** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

7. 11,023

8.
   a. $10^{-2,3}$
   b. $10^{-0,3}$
   c. 14,68

Página 38

1. Respuesta variable, por ejemplo, es imposible cortar ese largo de cuerda con exactitud.

2.
   a. Irracional.
   b. 2,828.

3. 5,657. 11,314. 14,142. Todos números irracionales. Respuesta variable, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado con lado a es $a\sqrt{2}$, por lo tanto, si a es racional, la diagonal será siempre irracional.

4.
   a. Irracional.
   b. Racional. 3.
   c. Irracional.
   d. Irracional.

5.

6. 5,4772256. Respuesta puede variar dependiendo de las cotas utilizadas.

Página 39

7.
   a. $9(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
   b. $\sqrt{6}$
   c. 2
   d. $\sqrt[12]{\frac{2}{7}}$
   e. $\left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$
   f. $-6\sqrt{3}$

8.
   a. Falso, debe, además, ser diferente de 1.
   b. Falso, la base no puede ser negativa.
   c. Verdadero.
   d. Verdadero.

9.
   a. −6,51
   b. 1,21

10.
   a. $2x^2 = 450$; $x = 15$ m. Donde x es el lado más corte del rectángulo.
   b. $x = \sqrt[3]{\frac{159720}{15}} = 22$ cm.
   c. 100 insectos. 20 horas.

Unidad 2: Álgebra y funciones.

Página 40

1. Pregunta abierta.
2. Pregunta abierta.
3. Pregunta abierta.

Página 41

4. Pregunta abierta.
5. Al menos 14 km.

Página 42

1.

a. 37,5
b. 3968
c. 0,36
d. 75 %
e. 66,67 %
f. 25 %
g. 70
h. 3400

2.

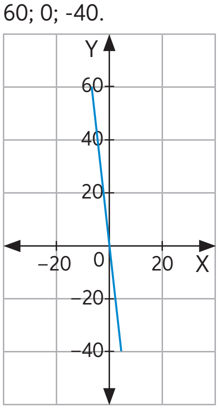
a. $x^2 - 12x + 35$. Binomio con un término repetido.
b. $x^2 + 4x - 60$. Binomio con un término repetido.
c. $x^2 - 12x + 36$. Binomio al cuadrado.
d. $x^2 - 121$. Suma por su diferencia.
e. $16x^2 + 36x - 22$. Binomio con un término repetido.
f. $4x^2 - 25$Suma por su diferencia.
g. $x^2 - \frac{1}{4}$. Suma por su diferencia.
h. $\frac{x^2}{4} - \frac{19}{8} + 3$. Binomio con un término repetido.

3.

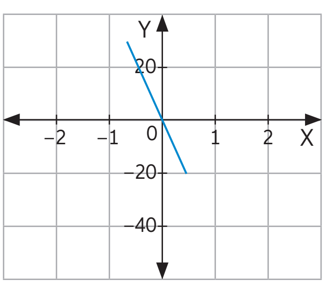
a. $(1 - 0,25) \cdot 4 \cdot 12 = x$. Hay 36 bombones sin envolver.
b. $8x = 48$. Los lados miden 6 cm y 18 cm.
c. $x = 1,19 \cdot 9000$. El valor del libro, con IVA, es $10710.
d. $x = \frac{9520}{1,19}$. El valor del libro, sin IVA, es $8000.

4.

a. 60; 0; -40.
b.



c.



d. Si, ya que para cada x, existe un único valor de F.

Lección 4

Página 43

1.

a. Homosexual: 204. Bisexual: 233. Heterosexual: 8779. Aún no definida: 204. Otro: 68. No sabe/No responde: 223.
b. Su sexo masculino coincide: 4821. Su sexo femenino coincide: 4656. Su sexo no coincide: 204.
c. Varió en 0,92.

- Pregunta abierta.
- No hay variación en el tiempo.

Página 44

2.

a. Aumentó en un 3 %.
b. $803,4.
c. Aumentó en $47,5.

3.

a. 0,8.
b. Decrece. Es menor que 1.
c. No, es el mismo porcentaje para cantidades distintas.
d.

Tiempo (año)	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Animales (cantidad)	2,56	2,05	1,64	1,31	1,05	0,84

4.

a. El índice de variación se mantiene constante, es 1,2.
b. 4,977 m.
c. 2025.
d. $f(t + 1) = Iv \cdot f(t)$

Página 45

5.

a. $V(t + 1) = 0,911 \cdot V(t)$
b. $d(t + 1) = 1,071 \cdot d(t)$
c. $O(t + 1) = 1,027 \cdot O(t)$
d. $D(t + 1) = 1,195 \cdot D(t)$
e. $E(t + 1) = 0,996 \cdot E(t)$

6.

a. Que su valor va disminuyendo a medida que los años pasen.
b. A un 90% del valor. Corresponde a un 0,9.
c. $10\ 800\ 000 = 0,9 \cdot 12\ 000\ 000$,
$9\ 720\ 000 = 0,9 \cdot 10\ 800\ 000$
d. La variable x es la cantidad de años desde que se compró el vehículo y la variable y es el valor después de esos años.

Página 46

7.

a. Aumenta. El índice de variación debe ser mayor que 1.

b. 1,07. $f(t + 1) = 1,07 \cdot f(t)$

c. 236,17.

8.

a. 1,5.

b. 0,8.

c. 0,2.

Para concluir:

a. No habría una regla general para todos los puntos.

b. Para el crecimiento porcentual, el gráfico debe ser creciente. Para el decrecimiento porcentual, el gráfico debe ser decreciente.

Página 47

1.

a. $2 249 728

b. $12 166 529

Página 48

2.

a. A es la cantidad inicial de habitantes y *r* es el índice de variación.

b. Recursiva: $P(t + 1) = 1,03 \cdot P(t)$

Explícita: $P(t) = 500 \cdot 1,03^t$.

c. El número de habitantes pasados 8 años. $P(8) = 633$

d.

Año	*t*	*P(t)*
1970	0	500
1971	1	515
1972	2	530,45
1973	3	546,36
1974	4	562,75

3.

a. Es el tiempo, en promedio, que el isótopo radioactivo carbono-14 deja de ser radioactivo.

Página 49

b.

t (años)	0	5730	11 460	17 190	22 920	28 650	34 380
Porcentaje (%)	100	50	25	12,5	6,25	3,125	1,5625

c. 0,0977 %

d. Aproximadamente 13 305 años.

4.

a. Mensual: se aplica cada vez que pasa un mes, es decir, 12 veces en un año. Trimestral: se aplica cada vez que pasan tres meses, es decir, 4 veces en un año. Semestral: se aplica cada vez que pasan 6 meses, es decir, dos veces en un año. Anual: se aplica cada vez que pasa un año.

b.

I. 1,06.

II. $1 123 600

III. $1 262 477

c. Al término de la inversión, el primero tiene $63 285, el segundo tiene $58 44 y el tercero tiene $59 687. Por lo tanto, la primera persona tiene más dinero a la hora del retiro.

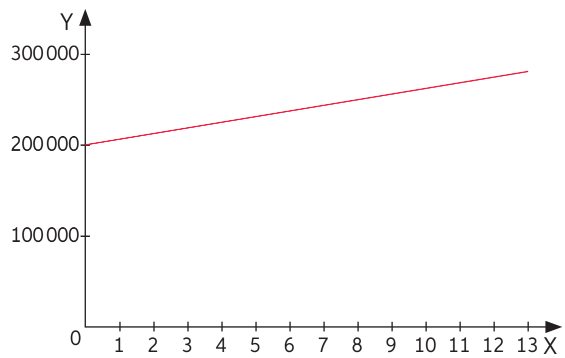
d.

I.

Año (n°)	Capital adquirido ($)
1	208 488
2	217 337
3	226 561
4	236 176
5	246 200
6	256 649
7	267 541

Año (n°)	Capital adquirido ($)
8	278 896
9	290 732
10	303 071
11	315 934
12	329 343
13	343 320

II.



e.

Tiempo (años)	Compuesto ($)	Simple ($)
0	1 000 000	1 000 000
1	1 100 000	1 100 000
2	1 210 000	1 200 000
3	1 331 000	1 300 000
4	1 464 100	1 400 000
5	1 610 510	1 500 000
6	1 771 561	1 600 000

Para concluir

a. Pregunta abierta, por ejemplo, la concentración de algún fármaco en la sangre, la cantidad de agua de una piscina al drenarla y reproducción de bacterias en el tiempo.

b. El interés simple siempre se calcula con respecto al valor inicial. El interés compuesto se calcula con respecto al valor anterior.

Página 50

a. No tenemos información sobre el valor del dólar antes de nuestro día inicial, por lo tanto, al asignar cero, estamos diciendo que todos los valores anteriores a nuestro día inicial son ceros.

b. Dividiendo el valor del día a calcular por el valor del día anterior.

- c. Pregunta abierta.
- d. Pregunta abierta.
- e. Sí, ya que estamos usando toda la información de los días observados para poder extrapolarla a los próximos días usando una fórmula de recurrencia. Pero, al ser predicciones, siempre tendrán un error asociado que crecerá a medida que tratemos de predecir más hacia el futuro.

Lección 5

Página 51

1.

- a. Lechuga: 99 m^2. Trigo: x^2.
- b. $21x$; $x^2 + 99$.
- c. $x^2 - 21x + 99 = 0$. Tiene una parte cuadrática en x.
- d. Ambos son correctos ya que cumplen la igualdad.

2.

- a. No.
- b. Si, $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$
- c. No.
- d. Si, $a = 1$, $b = 6$, $c = -2$.
- e. Si, $a = 3$, $b = 0$, $c = -5$
- f. No.
- g. Si, $a = 1$, $b = -2$, $c = -15$.
- h. No.

Página 52

3. $x^2 + 2x - 15 = 0$; $2x^2 + 8x - 8 = 0$; $x^2 + 9x + 2 = 0$.

4. Al reemplazar x por -1 en la ecuación, se cumple la igualdad. También significa que, al graficar la ecuación, la función intersecta al eje X en -1.

5.

a.

Ecuación	Soluciones	
$x(x - 5) = 0$	0	5
$(x + 1)x = 0$	–1	0
$(x + 10)(x + 2) = 0$	–2	–10
$(x - 14)(x - 8) = 0$	8	14
$(x + 7)(x - 5) = 0$	–7	5
$2x(x - 2) = 0$	0	2

b. Respuesta personal.

6.

- a. $h = 5 + 50t - 5t^2$
- b. 110 m.
- c. 10 segundos.
- d. $a = -5$; $b = 50$; $c = 5$.

Para concluir:

- a. Pregunta abierta, por ejemplo, es una ecuación en la cual la mayor potencia de x es 2.
- b. Pregunta abierta, por ejemplo, son los valores de x para los cuales se cumple la igualdad, también son los puntos en los cuales la función intersecta el eje X.

Página 53

1.

- a. Rosado.
- b. Verde + azul.
- c. Figura completa.
- d. Rosado + azul.
- e. Verde.
- f. Naranjo.

2.

- a. Ancho: x, Largo: $(x + 3)$
- b. $(x + 5)(x - 2) = 0$
- c. $x_1 = -5$; $x_2 = 2$.
- d. No puede ser -5 m, ya que las longitudes son siempre positivas.
- e. Las dimensiones son 2 m de ancho y 5 m de largo.

Página 54

Pregunta abierta, por ejemplo, al factorizar quedan dos paréntesis y en cada uno de ellos hay una ecuación linear. Es decir, para resolver $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ hay que resolver las dos ecuaciones lineales $x - x_1 = 0$ y $x - x_2 = 0$.

3.

a.

- I. $x_1 = 0$ y $x_2 = 7$
- II. $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$
- III. $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-5}{6}$
- IV. $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-23}{5}$

b.

- I. $x = -1$
- II. $x = -\frac{1}{3}$
- III. $x = \frac{1}{2}$
- IV. $x = -\frac{1}{3}$

c.

- I. $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$
- II. $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = \frac{-1}{6}$
- III. $x_1 = \frac{R2}{5}$ y $x_2 = \frac{-R2}{5}$
- IV. $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = \frac{-1}{6}$

Página 55

d.

- I. $x_1 = \frac{-3}{2}$ y $x_2 = \frac{4}{5}$
- II. $x_1 = \frac{-1}{2}$ y $x_2 = \frac{-5}{3}$
- III. $x_1 = \frac{5}{9}$ y $x_2 = \frac{-3}{2}$
- IV. $x_1 = \frac{-4}{3}$ y $x_2 = \frac{-5}{2}$

4.

- a. $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$
- b. $x_1 = \frac{11}{2}$ y $x_2 = \frac{-11}{2}$
- c. $x_1 = 6$ y $x_2 = 2$
- d. $x_1 = \frac{9}{5}$ y $x_2 = \frac{-9}{5}$
- e. $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$
- f. $x = 7$
- g. $x_1 = -10$ y $x_2 = 6$
- h. $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$
- i. $x_1 = 1$ y $x_2 = 8$
- j. $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{16}{5}$

Pregunta abierta.

5.

a. $(x+1)^2-3x-211=0$ o $x^2-3(x-1)-211=0$. Soluciones: 15 y 16 o −14 y −13.
b. $x^2-10x-24=0$. Solución: 12 y − 2.
c. $6x^2-96=0$. Solución: 4m y 24m.
d. $x^2-4x-5=0$

▶ No, al estar igualado a cero, se puede multiplicar cada término por algún número, por ejemplo, $2x^2-8x-10=0$.

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, encontrar alguna factorización posible y resolver las ecuaciones lineales que resulten.
b. $k=-4$

Página 56

1.

a. 49
b. 36
c. $\frac{9}{4}$
d. 64

▶ Pregunta abierta, por ejemplo, dividir b por $2\sqrt{a}$ y ese resultado elevarlo al cuadrado.

2.

a. $x(x+4)=12$. Sí, $(x+6)(x-2)=0$
b. Pregunta abierta.
c. $(x+2)^2=16 \longrightarrow x^2+4x+4=16 \longrightarrow x(x+4)=12$
d. $x=2$. Los lados mides 2cm y 6cm.

Página 57

3.

a. Sumó, en ambos lados la cantidad necesaria para que al lado izquierdo quedara un cuadrado de binomio.
b. Pregunta abierta.
c. Cuadrado de binomio y suma por su diferencia.

Página 58

4.

a. $x_1=1$ y $x_2=-2$
b. $x_1=\frac{3}{4}$ y $x_2=-1$
c. $x_1=1{,}5$ y $x_2=-0{,}5$
d. $x_1=0$ y $x_2=\frac{2}{3}$
e. $x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{-5}{6}$
f. $x_1=5-3\sqrt{10}$ y $x_2=5+3\sqrt{10}$

5. Quedaría $(x-2)^2=-1$, por lo tanto no es un número real.

6.

a. x = 9
b. x = 18
c. x = 3
d. x = 1
e. x = 2
f. x = 2

Para concluir:

a. Pregunta abierta.
b. El número entero es 2.

Página 59

1.

a. A completar un cuadrado.
b. Suma, multiplicación y raíz a ambos lados de la ecuación.
c. Tanto el valor positivo como el negativo, al elevarlo al cuadrado, queda positivo.
d. $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.

a. $x_1=\frac{-3+\sqrt{249}}{24}$ y $x_2=\frac{-3-\sqrt{249}}{24}$
b. $x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{12}$ y $x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$
c. $x_1=\frac{-3+\sqrt{14}}{2}$ y $x_2=\frac{-3-\sqrt{14}}{2}$
d. $x_1=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ y $x_2=\frac{-2\sqrt{7}}{7}$
e. −24
f. $b_1=1$ y $b_2=\frac{-1}{3}$
g. $x_1=3$ y $x_2=-9$
h. $x=\frac{1}{3}$
i. $x_1=\frac{2}{5}$ y $x_2=\frac{-7}{2}$
j. $x_1=\frac{9}{7}$ y $x_2=-1$

Página 60

3.

a. Los resultados son iguales independientemente del método utilizado.
b. Pregunta abierta.

4.

a. $x_1=\frac{3}{2}$ y $x_2=\frac{-2}{3}$
b. Los resultados son iguales. Al multiplicar a ambos lados por algún número, en este caso por 4, se mantiene la igualdad.
c. Pregunta abierta, por ejemplo, $\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$ es equivalente a $x^2-2x+1=0$ con solución $x=1$.

5.

a. $x_1=3$ y $x_2=-\frac{1}{2}$
b. $x=1$
c. No tiene soluciones reales.
d. La primera tiene dos soluciones diferentes, la segunda tiene una solución y la tercera no tiene soluciones en los reales.
e. Lo que está dentro de la raíz.
f. $b^2-4ac\geq 0$

6.

a. −108, no tiene soluciones reales.
b. 49, tiene dos soluciones reales distintas.
c. 49, tiene dos soluciones reales distintas.
d. −71, no tiene soluciones reales.
e. 0, tiene una solución real.
f. 3,75, tiene dos soluciones reales distintas.

Página 61

7.

a. $m > 1$; no existe; $0 < m < \frac{56}{9}$; $m < 1 - \sqrt{2}$ o $1 + \sqrt{2} < m$

b. $m = 1$; $m = 0$; $m = 0$ o $m = \frac{56}{9}$; $m = 1 - \sqrt{2}$ o $m = 1 + \sqrt{2}$

c. $m < 1$; $m \neq 0$; $m < 0$ o $m > \frac{56}{9}$; $1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$

8. El lado del cartón mide 18 cm.

9.

a. Pregunta abierta, por ejemplo, $x^2 - 4x + 3 = 0$ tiene soluciones 3 y 1;

$3 + 1 = 4 = -\frac{-4}{1} = -\frac{b}{a}$; $3 \cdot 1 = 3 = \frac{3}{1} = \frac{c}{a}$

b.

I. $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$\frac{-b - b + \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

II. Al multiplicar las dos soluciones, tenemos una suma por su diferencia, por lo tanto:

$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$

$\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

c. Respuesta variable. Por ejemplo $x^2 - 1 = 0$

Respuesta personal.

Para concluir:

a. Pregunta abierta.

b. Para que sean racionales el determinante debe ser cero o un cuadrado perfecto. Para que sean irracionales, el determinante debe ser diferente de cero y no ser un cuadrado perfecto.

Página 62

a. $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

b. $x = 1$

c. $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$

d. $x_1 = 4$ y $x_2 = \frac{-5}{2}$

e. $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

f. $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-3}{8}$

Lección 6

Página 63

1.

a.

x	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm²)
1	5,5	5	27,5
2	9,5	8	76
3	13,5	11	148,5
4	17,5	14	245
5	21,5	17	365,5

b. 5 cm y 5,5 cm.

c. $1000A_t = 12000x^2 + 12500x + 3000$

d. Ambos aumentan a medida que x aumenta.

Página 64

2.

a. No, el mayor grado de x es 1.

b. No, es una ecuación cuadrática.

c. No, el mayor grado de x es 1.

d. No, es una ecuación cuadrática.

e. Si, el mayor grado de x es 2.

f. No, el grado de t es un medio.

3.

Función	a	b	c
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$	2	3	–1
$f(x) = 2x^2 + 5x + 16$	2	5	16
$f(x) = (4x - 1)(2x + 3)$	8	10	–3

4.

a. 8; $\frac{1}{2}$; –1; 14

b. –3; $-\frac{5}{4}$; 1; 7

c. –1; –1; 1; 11

d. 30; $\frac{45}{4}$; –18; –108

5.

a. $A(h) = h \cdot (25 - h)$

b. Puede tomar los valores de 5 cm o 7,5 cm

c. Deben ser mayores a 0 y menores a 12,5. Si no se encuentran en este intervalo no es posible formar la canaleta.

Para concluir:

a. 126

b. Respuesta variable.

Página 65

1.

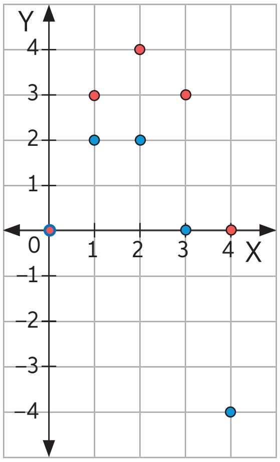
a.

t	$v_F(t)$
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0

t	$v_R(t)$
0	0
1	2
2	2
3	0
4	–4

b. Ambos están detenidos al segundo 0, por lo que sus velocidades son 0. Además, ambos llegan a un punto máximo del otro lado de la rampla donde se detienen y sus velocidades vuelven a ser cero, Fernando al segundo 4 y Rodrigo al segundo 3.

c. En rojo Fernando, en azul Rodrigo.



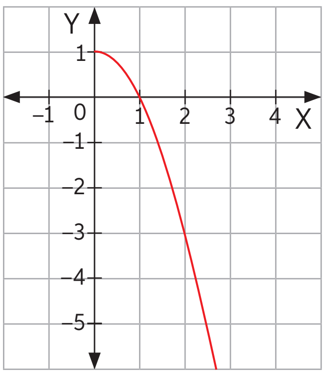
d. Las gráficas seguirán disminuyendo a medida que x aumente y para valores negativos.

e. La velocidad máxima de Fernando es 4 m/s y la de Rodrigo es 2 m/s. El punto máximo (o mínimo) se calcula como $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2. Pregunta abierta, depende de los puntos elegidos, por ejemplo,

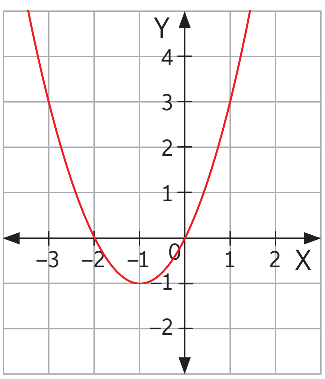
a.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	−3	−8	−15



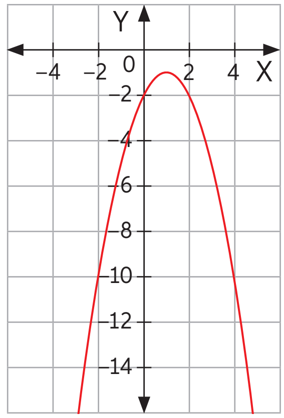
b.

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	0	−1	0	3	6



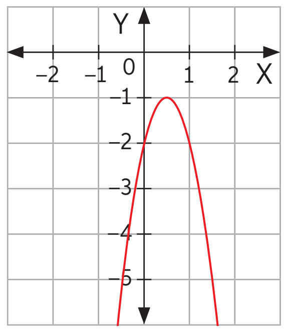
c.

x	−1	0	1	2	3
$h(x)$	−7	−2	−1	−7	−17



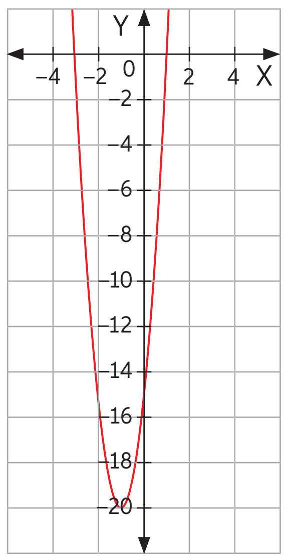
d.

x	−4	−2	0	2	4
$i(x)$	−82	−26	−2	−10	−58



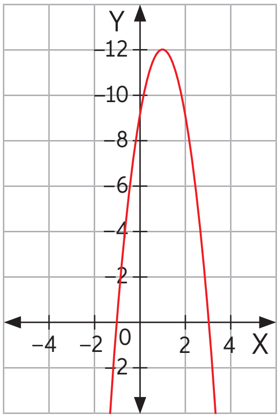
e.

x	−4	−2	0	2	4
$j(x)$	25	−15	−15	25	105



f.

x	−4	−2	0	2	4
$k(x)$	−63	−15	9	9	−15



Página 66

g. Cuando a es negativo, la función se abre "hacia abajo". Cuando a es positivo, la función se abre "hacia arriba".

h. $f(x)$: Dom = [0, 5] y Rec = [−24, 1]; $g(x)$: Dom = [−3, 3] y Rec = [−1, 15]; $h(x)$: Dom = [−2, 4] y Rec = $[-22, -\frac{7}{8}]$; $i(x)$: Dom = [−5, 5] y Rec = $[-122, -\frac{3}{2}]$; $j(x)$: Dom = [−5, 5] y Rec = [−20, 160]; $k(x)$: Dom = [−5, 5] y Rec = [−96, 12].

Estudiando el máximo o mínimo usando $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ y evaluando los puntos extremos del dominio en la función.

Pregunta abierta.

3.

a.

x	−2	−1	0	3
$f(x)$	0	−1	0	1
Puntos	(−2, 0)	(−1, −1)	(0, 0)	(3, 1)

x	0	1	2	3
$g(x)$	4	1	0	1
Puntos	(0, 1)	(1, 1)	(2, 0)	(3, 1)

x	0	1	2	3
$h(x)$	2	1	2	5
Puntos	(0, 2)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 5)

b. $f(x)$ interseca al eje X en (−2, 0) y (0, 0) y al eje Y en (0, 0). $g(x)$ interseca al eje X en (0, 1) y al eje Y en (2, 0). $h(x)$ no interseca al eje X y al eje Y en (0, 2).

c. Se obtiene el coeficiente c, gráficamente es la intersección del eje Y.

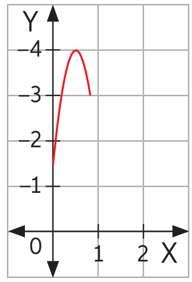
d. $f(x)$ tiene discriminante mayor a 0, $g(x)$ discriminante igual a 0 y $h(x)$ discriminante negativo. Se relaciona con cuantas veces interseca al eje X.

Página 67

Pregunta abierta.

4.

a.



b. Se lanzó a 1,5 m. La mayor altura fue 4 m. Ocurre después de 0,5 segundos.

c. $-10t^2 + 10t - 1,5 = 0$. $\frac{5+\sqrt{10}}{10}$ y $\frac{5-\sqrt{10}}{10}$ segundos.

d. $\frac{5+\sqrt{10}}{10}$ segundos es el resultado correcto, ya que $\frac{5-\sqrt{10}}{10}$ es cuando la pelota se va elevando.

e. En los puntos $\frac{5-2\sqrt{10}}{10}$ y $\frac{5+2\sqrt{10}}{10}$. Ninguno tiene sentido, el primer punto es negativo y no hay tiempo negativo, el segundo tiempo es después que alcanza el aro, por lo que la pelota no continua la curva hasta llegar al suelo.

f. El promedio, en ambos casos, es 0,5 y corresponde al tiempo en que la pelota alcanza su altura máxima.

Página 68

5.

a. Concavidad: Hacia arriba; Vértice: (0, 0);Simetría: $x = 0$; Eje X: (0, 0);Eje Y: (0, 0)

b. Concavidad: Hacia abajo; Vértice: (0, 9);Simetría: $x = 0$; Eje X: (3, 0) y (−3, 0);Eje Y: (0, 9)

c. Concavidad: Hacia arriba; Vértice: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{26}{3}\right)$;Simetría: $x = \frac{1}{3}$; Eje X: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{3}, 0\right)$;Eje Y: (0, −8)

d. Concavidad: Hacia abajo; Vértice: (−1, 2);Simetría: $x = -1$; Eje X: $(-1+\sqrt{2}, 0)$ y $(-1-\sqrt{2}, 0)$;Eje Y: (0, 1)

e. Concavidad: Hacia abajo; Vértice: $\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{8}\right)$;Simetría: $x = -\frac{5}{4}$; Eje X: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y (−1, 0);Eje Y: (0, −3)

f. Concavidad: Hacia abajo; Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{40}{9}\right)$;Simetría: $x = -\frac{3}{2}$; Eje X: no interseca; Eje Y: $\left(0, -\frac{241}{36}\right)$

6.

a. Bajo la curva.
b. En la curva
c. En la curva.
d. Sobre la curva.

Para concluir:

a. Las intersecciones con el eje X. Las intersecciones con el eje X de la función $g(x) = x^2 + x - 2$

b. Se puede conocer si el vértice es un máximo o mínimo a través de la concavidad de la parábola, el eje de simetría, las raíces mediante la intersección de la parábola con el eje X y el punto de intersección con el eje Y.

Página 69

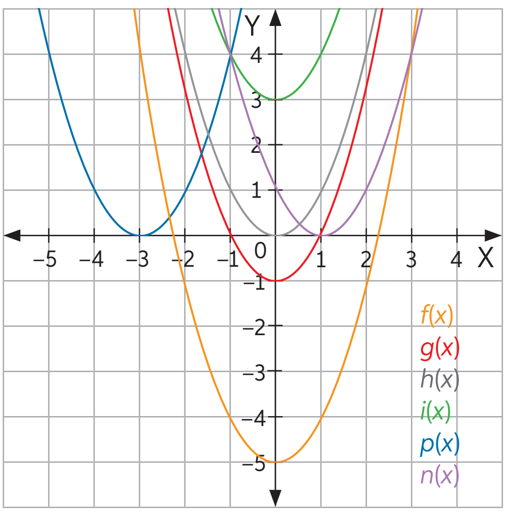
1.

a. La función se abre a medida que se acerca a cero, se cierra cuando se aleja de cero y se transforma en una recta cuando es cero. El valor del vértice no se modifica.
b. Respuesta personal.
c. Cuando *b* crece se va moviendo hacia la izquierda y abajo, cuando b decrece se va moviendo a la derecha y arriba.
d. Si $a > 0$, *b* hace que el vértice disminuya y se mueva a la derecha si *b* disminuye o izquierda si *b* aumenta. Si $a < 0$, *b* hace que el vértice aumente y se mueva a la derecha si *b* aumenta o izquierda si *b* disminuye. Cuando *b* es cero, el eje de simetría es el eje Y.
e. Al aumentar *c*, el vértice sube. Al disminuir *c*, el vértice baja.
f. El parámetro *c* hace una traslación vertical del vértice en *c* unidades.
g. Forma una parábola.

Página 70

2. El módulo del coeficiente es el mismo, por lo tanto la cercanía al eje Y no cambia. Solo cambia la dirección de la parábola.

3. Gráficos:



a. Hacia arriba: *h*(*x*). Hacia abajo: *i*(*x*) y *g*(*x*). Se debe al parámetro *c*.
b. Hacia la izquierda: *p*(*x*). Hacia la derecha: *m*(*x*) y *n*(*x*). Se debe al parámetro *b* que forma un cuadrado de binomio.
c. Tres unidades hacia arriba y dos unidades hacia la derecha.

▶ Pregunta abierta.

Página 71

4.

a. $(x+2)^2-3$
b. $(x-3)^2-11$
c. $(x+2)^2-4$
d. $2(x+2)^2-7$
e. $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3$
f. $\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{4}$

5.

a. 3
b. –1
c. 2
d. –3
e. 1
f. $h = 0$ y $k = 2$

6.

a. $g(x) = 4(x+4)^2$; $h(x) = 4(x+3)^2-2$; $p(x) = 4x^2-2$; $q(x) = 4(x-3)^2+1$; $r(x) = 4(x-4)^2-1$
b. $g(x) = 4x^2+32x+64$; $h(x) = 4x^2+24x+34$; $p(x) = 4x^2-2$; $q(x) = 4x^2-24x+37$; $r(x) = 4x^2-32x+63$

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, la forma canónica para graficar y la forma general para calcular los ceros de la función.
b. Pregunta abierta.

Página 72

1.

a. La ganancia va aumentando hasta llegar a un maximo y después decae hasta ser nula.
b. La ganancia será entre 70,32 miles de dolares.

Página 73

c. las ganancias maximas serán 80 mil de dolares y ocurrirá al vender en 23 dolares cada libro.
d. 86 dolares.

▶ Desarrollar la forma general y calcular $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

2.

a. A los dos segundos.
b. 20 metros.
c. 4 segundos.

3.

a. 1,67 m para a(*t*) y 2,67 m para *b*(*t*).
b. Ambos alcanzan los 3 m, *a*(*t*) en 2 segundos y *b*(*t*) en un segundo.
c. *a*(*t*) en 5 segundos y *b*(*t*) en 4 segundos.
d. 3 segundos *a*(*t*) y 2 segundos *b*(*t*).

Página 74

4.

a. $f(x) = -x^2+30x$
b. Dom = [0, 30] y Rec=[0, 225]
c. 225 m^2.

5.

a. $f_1(x)$: 44m de altura a los 44m; $f_2(x)$: $\frac{2048}{33}$m de altura a los 64m; $f_3(x)$: 75m de altura a los 75m.
b. $f_1(x)$: 88m; $f_2(x)$: 128m; $f_3(x)$: 150m.

6. En 2 y 4 horas.

7. 4 segundos.

Para concluir:

a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.

Página 75

c.

–7	–4	5	8
7	6	–5	–6
0	–3	4	1
2	3	–2	–1

d. Pregunta abierta.
e. Pregunta abierta.

Lección 7

Página 76

1.

a. [0, 500]. La cantidad de mg de dosis que se puede inyectar.

b. [0, 500]. Los minutos de efectividad de la dosis administrada.

c.

Gramos (mg)	Tiempo (m)
5	0,05
15	0,45
100	20
150	45
175	61,25
200	80

d. 489,9 mg.

e. 346,41 mg.

f. $x=\sqrt{500t(x)}$

Página 77

2.

a. Tiene inversa, cada elemento del recorrido tiene un único elemento del dominio.

b. No tiene inversa, hay más de un elemento del recorrido con un único elemento del dominio.

c. No tiene inversa, hay más de un elemento del recorrido con un único elemento del dominio.

d. Tiene inversa, cada elemento del recorrido tiene un único elemento del dominio.

e. No tiene inversa, hay más de un elemento del recorrido con un único elemento del dominio.

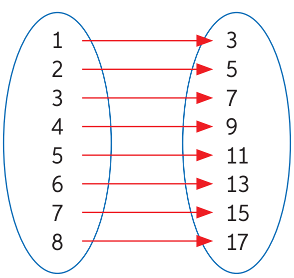
f. Tiene inversa, cada elemento del recorrido tiene un único elemento del dominio.

3.

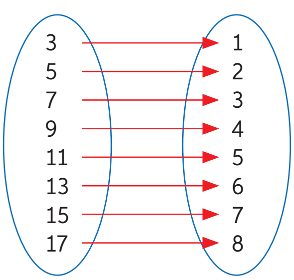
a. $t(x) = 2x + 1$

b. {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17}

c.



d.



e. $t^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

Página 78

4. Multiplica cada número por 2; disminuye cada número en una unidad; resta 4 unidades y lo divide por 2; resta 3 unidades a cada número.

5.

a. Verdadero.

b. Verdadero.

c. Falso.

d. Verdadero.

6.

a.

x	7	8	9	10
$f(x)$	4	5	6	7

b. $f^{-1}(x) = x-3$

c.

x	4	5	6	7
$f^1(x)$	7	8	9	10

d. La primera fila es la segunda de la tabla y viceversa. Las tablas están invertidas.

Para concluir:

a. Se obtiene f.

b. Pregunta abierta, por ejemplo, una función tal que a cada valor del recorrido le asigna el valor del dominio.

Página 79

1.

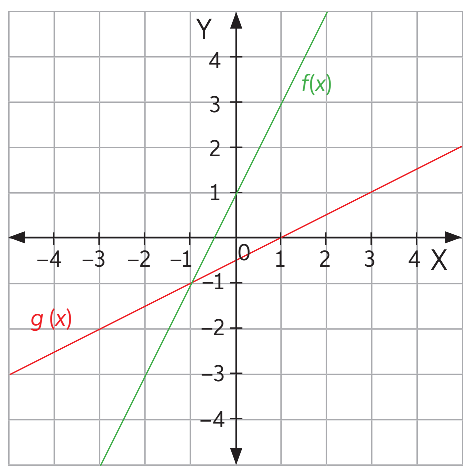
a. Dom(f)=R. Rec(f)=R. Dom(g)=R. Rec(g)=R.

b. Pregunta abierta, por ejemplo,

x	-3	0	1	2
$f(x)$	-5	1	3	5

x	-5	1	3	5
$g(x)$	-3	0	1	2

c.



d. Pregunta abierta, por ejemplo, ambas son rectas con pendientes positivas.

3 formas distintas.

2.

a. Son reflexiones con respecto a $x = y$.

b. b. Se invierten sus coordenadas.

c. Cómo se tiene que (a, b) pertenece a f:

a b

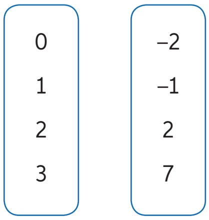
Entonces, su función inversa relaciona a:

b a

Página 80

3.

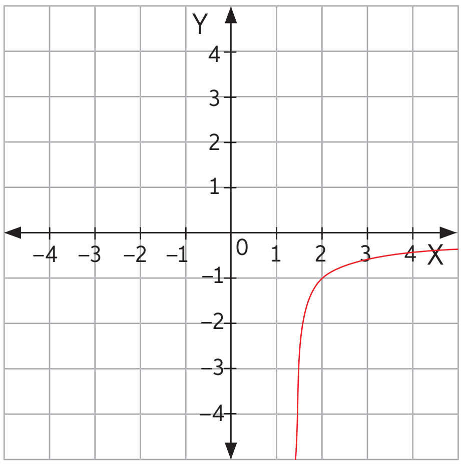
a.



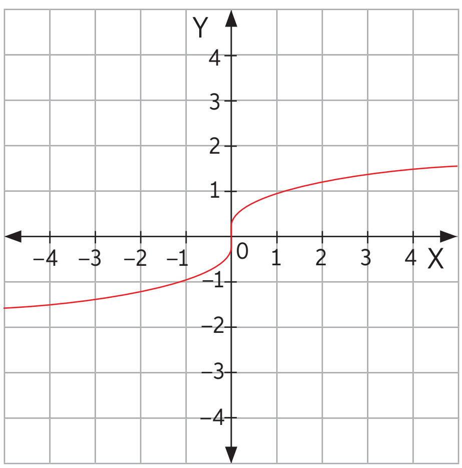
b. (−2, 0); (−1, 1); (2, 2); (7, 3)

4.

a.



b.



Página 81

5.

a. Corresponde.
b. Corresponde.
c. Corresponde.
d. No corresponde.
e. No corresponde.
f. No corresponde.

6.

a. Falso
b. Falso
c. Verdadero
d. Falso
e. Falso

Página 82

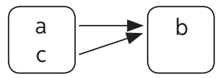
7.

a. $f(x)$: (−2, 5); (−1, 2); (0, 1); (1,2); (2, 5)
$g(x)$: (−2, −8); (−1, −2); (0, 0); (1, −2); (2, −8).

b. No. Para $f(x)$ tenemos los pares (−1, 2) y (1, 2), es decir, para distintos elementos de X tenemos el mismo elemento de Y. Para $g(x)$ tenemos los pares (−1, −2) y (1, −2), es decir, para distintos elementos de X tenemos el mismo elemento de Y.

c. Si, ya no se van a repetir los elementos de X.

d. Si los puntos (a, b) y (c, b), con c distinto a a, pertenecen a la misma función, entonces no cumple con la condición de “Cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento distinto del codominio”. Gráficamente se visualiza al intersecar en dos puntos a una recta paralela al eje X. En un diagrama sagital se visualiza con dos elementos distintos del dominio relacionados con un mismo elemento del codominio:



8.

a. Si, cada elemento de X tiene un solo elemento de Y.
b. No, hay hasta tres elementos de X con un mismo elemento de Y.
c. Si, cada elemento de X tiene un solo elemento de Y.

Para concluir:

d. Pregunta abierta.
e. Si, la inversa de la inversa es la función original.

Página 83

1.

a. No, 1,3 x 0,7=0,91.
b. $f(x) = 1{,}3x$
c. $g(x) = 0{,}7x$
d. Dominio: $\mathbb{R}^+ \cup 0$. Recorrido: $\mathbb{R}^+ \cup 0$.
e. No, al realizar el descuento sobre el aumento del precio no se llega al precio original.
f. $f^{-1}(x) = \frac{10}{13}x$; $g^{-1}(x) = \frac{10}{7}x$
g. Se debe cumplir que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Se debe rebajar en un 0,769%.

Es una reflexión con respecto a la recta $y=x$.

Página 84

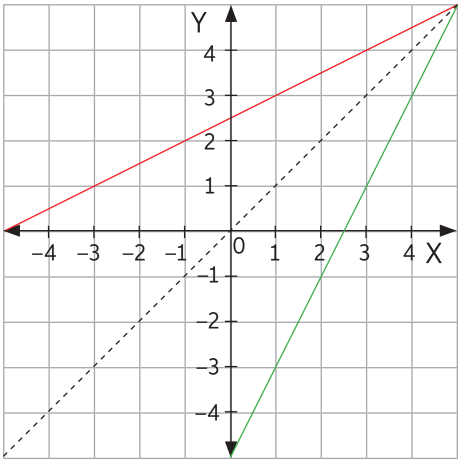
2.

Descripción		Expresión algebraica	
f	$f^{-1}(x)$	f	$f^{-1}(x)$
Multiplica cada número por 3	Divide cada número por 3	3x	$\frac{1}{3}x$
Divide cada número por 2	Multiplica cada número por 2	$\frac{1}{2}x$	$2x$
Aumenta cada número en una unidad	Disminuye cada número en una unidad	$x+1$	$x-1$
Multiplica cada número por 2 y lo aumenta en 4 unidades	Disminuye cada número en 4 unidades y lo divide por 2	$2x+4$	$\frac{1}{2}(x-4)$

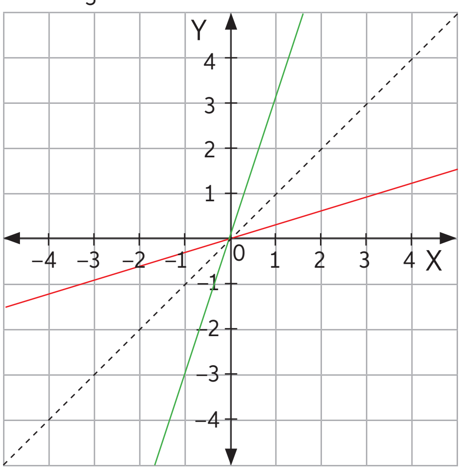
▶ Las primeras dos son lineales y las últimas dos son afines.

3.

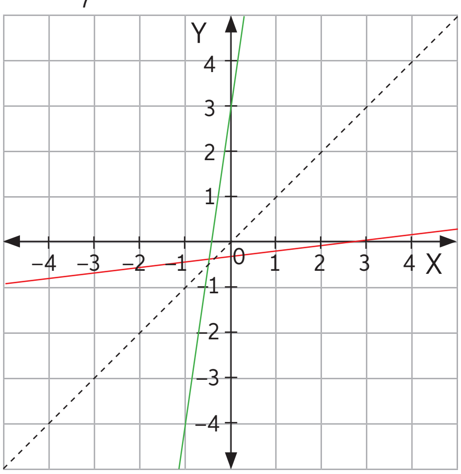
a. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$



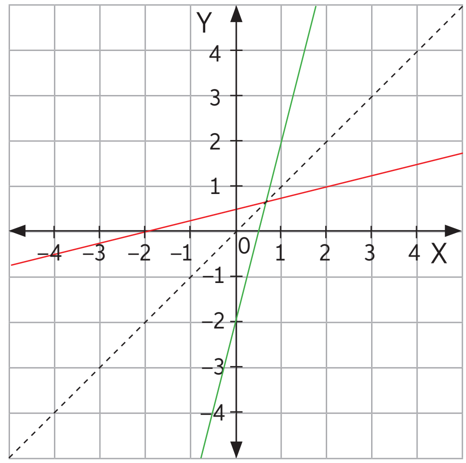
b. $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$



c. $a^{-1}(t) = \frac{1}{7}(t-3)$



d. $b^{-1}(t) = \frac{1}{4}(t + 2)$



4.

a. g es igual a h.

b. $f(x)=\frac{1}{16}(x - 40)$; $h(x) = 16x + 40$.

5.

a. Falso, el signo del coeficiente en x se mantiene.

b. Falso, será $\frac{1}{5}$.

c. Falso, será el punto de intersección con el eje X.

d. Falso, $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x-2$.

e. Verdadero.

6.

a. Es una función afín con $m = 0$ y $n = 1$.

b. Lleva todos los números a 1. El proceso inverso es llevar 1 a todos los números, no existe la función inversa.

c. Recta paralela a Y. No es función.

Página 85

7.

a. $p = \frac{1}{3}$ y $q = \frac{5}{3}$.

b. $p = 1$ y $q = -3$.

c. $p = \frac{1}{5}$ y $q = 50$.

d. $p = \frac{1}{2}$ y $q = -\frac{3}{4}$.

8.

a. $f(x) = -2x$; $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}$.

b. $f(x) = 2x$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

c. $f(x) = 5x - 2$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 2)$.

d. $f(x) = x - 6$; $f^{-1}(x) = x + 6$.

e. $f(x) = 4x - 6$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 6)$.

f. $f(x) = 4x$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$.

9.

a. $f(x) = 4000 + 1000x$

b. $f^{-1}(x) = \frac{x - 4000}{1000}$; Representa las horas en función del precio de arriendo.

Página 86

10.

a. Dominio: $\mathbb{R}_0^+$. Recorrido: $[-273{,}15, \infty)$.

b. $k(x) = x + 273{,}15$.

c. 73,15 K; 293,15 K; 308,15 K; 473,15 K.

d. $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$.

e. 232,78 C.

f. 37,78 C.

11.

a. Metro a pie: $f(x) = 3{,}28084\,x$; Metro a pulgada: $g(x) = 39{,}37008\,x$. $f^{-1}(x) = 0{,}3048\,x$; $g^{-1}(x) = 0{,}0254\,x$.

b. Todos los dominios y recorridos son los reales positivos.

Para concluir:

c. Pregunta abierta.

d. Sí, la inversa de la inversa es la función original.

Página 87

1.

a. $a = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0{,}25$.

b. l y t pueden tomar valores en $\mathbb{R}_0^+$.

c. El tiempo del periodo dado el largo del péndulo.

d. Como t toma valores positivos, debe ser 2.

e. $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

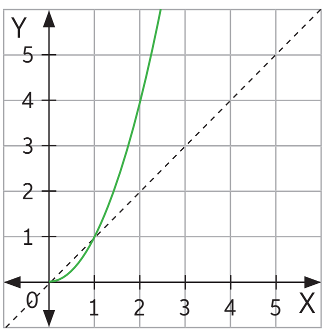
Sin restringir el dominio, no existiría inversa.

Página 88

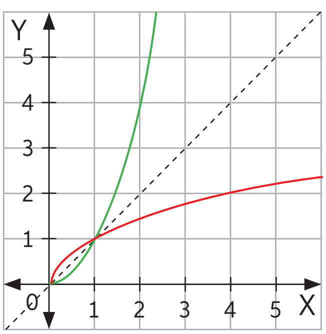
2.

a. (0, 0); (1, 1); (4, 2); (9, 3); (16, 4).

b.



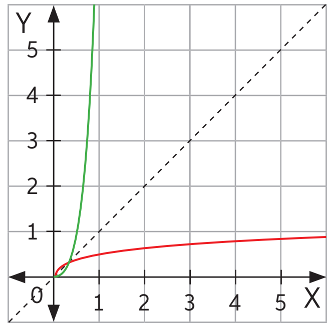
c.



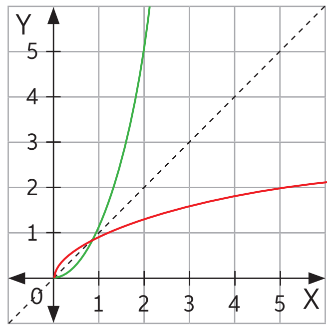
d. $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

3.

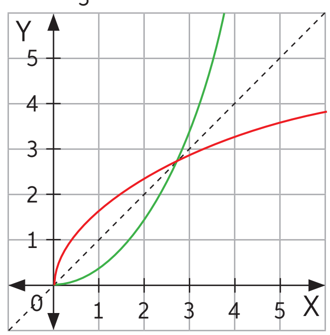
a. $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{6}}$



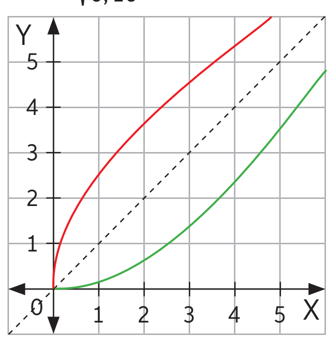
b. $g^{-1}(x)=2\sqrt{\frac{x}{5}}$



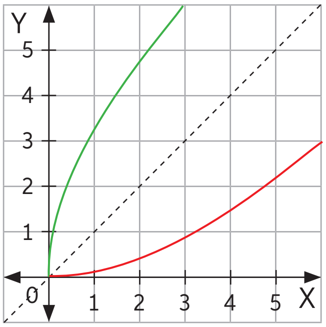
c. $h^{-1}(x)=\frac{5}{3}\sqrt{x}$



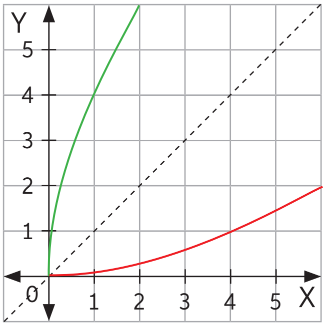
d. $p^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{0{,}16}}$



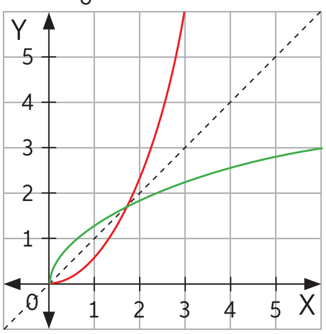
e. $q^{-1}(x)=\frac{x^2}{10}$



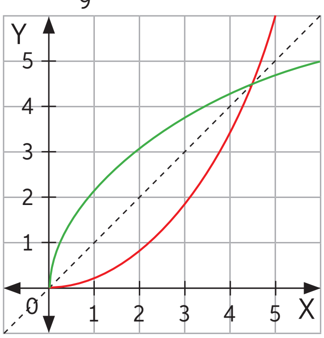
f. $s^{-1}(x)=\frac{x^2}{18}$



g. $r^{-1}(x)=\frac{5x^2}{8}$



h. $t^{-1}(x)=\frac{2x^2}{9}$



4.

a. Verdadero, $1^2=1$ y $\sqrt{1}=1$.
b. Falso, $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{a}}$ es una función creciente.
c. Verdadero, el dominio es positivo y ambas funciones tienen recorrido positivo.
d. Falso, sería (b, a).
e. Falso, es $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{3}}$.

Página 89

5.

a. $k = 1$
b. $k = 1-2\sqrt{2}$
c. $k = 5$
d. $k = 9$
e. $k = 4$

6.

a. $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
b. $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=2\sqrt{x}$
c. $f(x)=-\frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=-2\sqrt{x}$
d. $f(x)=x^2+1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$
e. $f(x)=\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=x^2$
f. $f(x)=2\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. $f^{-1}(x)=4x^2$

Página 90

7.

a. $m(x)$
b. $u(x)$
c. $v(x)$
d. $r(x)$
e. $n(x)$

8.

a. $x(U) = \sqrt{\frac{U}{200}}$. Dada la energía, en joule, cuánta energía potencial elástica tendrá un resorte.
b. $\frac{1}{5}$ m.

9.

a. 2,01
b. Le faltan 0,1 km
c. $t(d) = \left(\frac{10}{9}d\right)^2$
d. Ha demorado aproximadamente 20 min.
e. Aproximadamente 8 minutos.
f. 31 minutos

Para concluir:

a. Sería $-\sqrt{x}$, con $x \geq 0$.
b. Desde 5.

Página 91

a. L → 12 → −1; A → 1 → −12. Encontrando el valor numérico de la letra, restar 13 y elevarlo al cuadrado.
b. Pregunta abierta.
c. Tiene dos posibles letras, al ser la función x^2 y sin tener el dominio restringido, no existe inversa.
d. Existe inversa de *f*, no existe inversa de *g*.

Página 92

1.
a. Necesitará $167 500 mensual.
b. No, son $166 667 mensual, necesitará $833 mensuales más.
c. $33 500
d. 94,96 %. Como fue menor que 100 %, ganó menos dinero.

2.
a. $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$
b. $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{7}{9}$
c. $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$
d. $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$
e. $x_1 = -3$ y $x_2 = -9$
f. $x_1 = \frac{27}{88}$ y $x_2 = -\frac{27}{88}$
g. $x_1 = 8$ y $x_2 = 1$
h. $x_1 = 4$ y $x_2 = -\frac{5}{2}$
i. $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

Página 93

3.
a. 15.
b. 5 m y 7 m.
c. 8 y 3.

4.
a. Deben invertir 100 para ganar 55 000.
b. $v_0 = 80\sqrt{3}$
c.
- 80 metros
- 1,6 metros
- 19,6 metros
- Aproximadamente 4 segundos.

5.
a. $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$
b. $g^{-1}(x)=\frac{1+3x}{1-2x}$
c. No existe, para 2 valores de *x* se tiene el mismo valor de *f*(*x*).
d. No existe, para 2 valores de *x* se tiene el mismo valor de *f*(*x*).
e. $j^{-1}(x)=\frac{x^2-4}{4}$
f. No existe, para 2 valores de *x* se tiene el mismo valor de *f*(*x*).

Unidad 3: Geometría

Página 94

1. Pregunta abierta.
2. Se descubrió América.

Página 95

3. Una esfera.
4. Pregunta abierta.
5. Suponiendo los rayos del Sol paralelos, ya que se encuentra a una gran distancia, se puede estudiar el comportamiento de las sombras en distintos puntos para calcular la curvatura de la Tierra.

Página 96

1.
a. Círculo menor: $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$ cm^2.
Círculo mayor: $81\pi \approx 254,34$ cm^2.
b. 20 cm.
c. El perímetro es de 8π cm.
d. El área es $\frac{\pi}{2}$ cm^2.

2.
a. Si.
b. Si.
c. No.

3.
a. 33 cm^2.
b. 325π cm^3.
c. Pueden ser cualquier par de longitudes tales que $|A_x|^2 + |A_y|^2 = 100$, lo cual tiene infinitas soluciones.

4.
a. Falso.
b. Verdadero.
c. Falso.

Lección 8

Página 97

1.
a. Pelota.
b. Pregunta abierta.
c. Gorro: cono. Tarro: cilindro.

2.
a. Una esfera.
b. Pelota.

Página 98

3.
a. 20 cm.
b. $49\pi \approx 153,86$ cm^2.
c. $3\sqrt{2}$ cm.

4.

- **a.** Un cono con radio basal 5 cm y altura 5 cm. Semiesfera de radio 5 cm. Cilindro con radio basal 5 cm y altura 5 cm.
- **b.** $\frac{125}{3}\pi \approx 130,833$ cm^3. $125\pi \approx 392,5$ cm^3
- **c.** Pregunta abierta, por ejemplo: Sí, uno es un tercio del otro.

Para concluir:

- **a.** Pregunta abierta, por ejemplo, Cono: objeto que se coloca en la calle para detener el tránsito. Cilindro: parte de cartón en el cual se enrolla el papel higiénico. Esfera: bolitas o canicas con los que juegan los niños.
- **b.** Para el cono, su círculo máximo siempre será la base. Para el cilindro, todos los círculos son iguales.

Página 99

1.

- **a.** Sí se cumple.
- **b.** El volumen de la semiesfera será la diferencia entre el volumen de un cilindro y el volumen de un cono.

Página 100

2.

- **a.** $\frac{9}{2}\pi \approx 14,13$ cm^3; $\frac{16}{3}\pi \approx 16,7467$ cm^3; $\frac{1}{6}\pi \approx 0,523$ cm^3
- **b.** 0,2 cm^3. $10\sqrt{2}$ cm^3. 2π cm^3
- **c.** $\frac{1}{48}\pi \approx 0,0654$ cm^3
- **d.** $\frac{500}{3}\pi \approx 523,33$ cm^3
- **e.** $\frac{125}{6}\pi \approx 65,4167$ cm^3
- **f.** 3,0939 m

3.

- **a.** $\sqrt[3]{5,25} \cdot 10^3 \approx 1738,01$ km
- **b.** $\sqrt[3]{93,75} \approx 4,54$ cm
- **c.** $\sqrt[3]{0,06} \approx 0,019$ m

4. $7776\pi \approx 24,416$ cm^3

Página 101

5.

- **a.** Tierra: $3,45\pi \cdot 10^{11} \approx 1,083 \cdot 10^{12}$ km^3
  Sol: $4,502\pi \cdot 10^{17} \approx 1,414 \cdot 10^{18}$ km^3
- **b.** 109,3 y 1305632,5
- **c.** 1305633 aproximadamente.

6. 8

- **a.**

7. $3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

8.

- **a.** Pregunta abierta.
- **b.** 81 esferas.

9. 3025π cm^3 y 169π cm^3

10.

- **a.** $\frac{2048}{3}\pi \approx 2143,573$ cm^3
- **b.** $1024\pi \approx 3215,36$ cm^3
- **c.** 1071,78 cm^3 aproximadamente.

Para concluir:

- **a.** 125 veces.
- **b.** Entre la esfera y el cono, la razón es 4. Entre la esfera y el cilindro la razón es cuatro tercios.

Página 102

1.

- **a.** 4
- **b.** No.
- **c.** $4\pi r^2$

2.

- **a.** 256π cm^2
- **b.** 20736π km^2
- **c.** 144π mm^2
- **d.** $60,84\pi$ km^2
- **e.** 1600π m^2
- **f.** $6,76\pi$ cm^2

Página 103

3.

- **a.** 192π cm^2
- **b.** $60,75\pi$ cm^2

4.

- **a.** 324π cm^2
- **b.** 22500π cm^2
- **c.** $12,25\pi$ cm^2

5.

- **a.** 322π cm^2
- **b.** $82,6\pi$ cm^2
- **c.** $1416,2\pi$ cm^2

6.

- **a.** Falso.
- **b.** Falso.
- **c.** Falso.
- **d.** Falso.
- **e.** Falso.

Página 104

7.

Área superficie (cm^2)	Área círculo (cm^2)	Radio (cm)
324 π	81 π	9
256 π	64 π	8
484 π	121 π	11
576 π	144 π	12
144 π	36 π	6
1225 π	306,25 π	17,5

8.

a. Cantidad de alvéolos: $4 \cdot 10^8$. Radio: $1 \cdot 10^{-2}$ cm.

b. $\frac{4}{3}\pi \cdot 10^{-9}$ L cada uno y $\frac{16}{30}\pi$ L en total.

c. 16π m^2

Respuesta personal.

9.

a. 2π m^2

b. Aproximadamente 0,104 m^2

c. Aproximadamente 9,424 m^2

Para concluir:

a. Aumenta el doble.

b. Pregunta abierta, por ejemplo, se minimiza el volumen y superficie con respecto a un cilindro completo.

Página 105

a. Los volúmenes deben coincidir, esto se debe a que el volumen se puede entender como el espacio utilizado por la esfera.

b. Respuesta variable.

c. Se debe a la densidad.Página 106.

Lección 9

Página 106

1.

a. 5 cm y 10 cm.

b. Tienen iguales ángulos.

c.
- $\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{4}{3}$

- $\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{4}{3}$

d. Son equivalentes en lados homólogos.

e. Seguirían iguales.

Página 107

2.

a. sen(β) = 0,849; cos(β) = 0,528; tan(β) = 1,607.

b. sen(δ) = 0,324; cos(δ) = 0,946; tan(δ) = 0,343.

c. sen(γ) = 0,471; cos(γ) = 0,882; tan(γ) = 0,533.

d.

3.

a. Falso, el opuesto de γ es $\overline{OM}$.

b. Verdadero, el adyacente de δ es $\overline{OM}$ y la hipotenusa es $\overline{MN}$

c. Verdadero, $\overline{ON}$ es el opuesto y $\overline{OM}$ es el adyacente.

d. Verdadero, el adyacente de γ es el opuesto de δ.

e. Verdadero. $\overline{OM} > \overline{ON}$, $\frac{\overline{OM}}{\overline{MN}} > \frac{\overline{ON}}{\overline{MN}}$, sen($\gamma$) > sen($\delta$)

Página 108

4.

a	*b*	*c*	sen(γ)	sen(β)
$\sqrt{61}$	6	5	$\frac{6}{\sqrt{61}}$	$\frac{5}{\sqrt{61}}$
$\sqrt{29}$	2	5	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{5}{\sqrt{29}}$
$\sqrt{2}$	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$	4	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{\sqrt{13}}$
$\sqrt{53}$	7	2	$\frac{7}{\sqrt{53}}$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$
$\sqrt{13}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$	$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$

5.

a. Como el triángulo es equilátero, la altura es la misma que la mediana, por lo tanto, $\overline{AD} = \overline{DB} = a$.

b. $a\sqrt{3}$

c.

α	sen(α)	cos(α)	tan(α)
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

6. Las razones son independientes de la medida de los lados, por lo tanto, valen lo mismo cuando los lados miden 20 cm y 30 cm.
Sin importar el triángulo, los valores de la tabla siempre se cumplen.

α	sen(α)	cos(α)	tan(α)
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Ejemplos: cos(α) = sen(90°-α); cos2(α)+sen2(α) = 1; sen(−α) = -sen(α); cos(-α) = cos(α).

7.

a. 2

b. 0

c. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

d. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$

Página 109

8.

a. $\frac{7}{13}$

b. No, se necesitaría conocer la función inversa de seno.

c. α = 48,18° β = 41,81°

d. δ = 74,05°; λ = 15,95°

e. γ = 78,46°; σ = 11,54°

Para concluir:

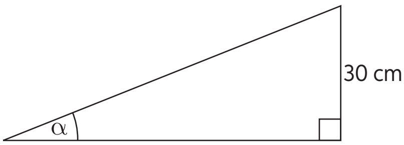
a. Iguales.

b. 45°

Página 110

1.

a.



$\tan(\alpha) \leq 0{,}12$

b. Cualquier ángulo menor o igual que 6,84°. Se usa el inverso de tangente.
c. 250
d. El largo mínimo son 250 cm.

▶ Entre mayor el ángulo, mayor es el esfuerzo que tiene que hacer la persona para subir por la rampla.

Página 111

2.

a. Se entrega el ángulo y el lado opuesto al ángulo. Se desconoce el lado adyacente al ángulo y la hipotenusa.
b. 8,52 m
c. 7,52 m

3. 47,01°
4. 373,49 m
5. 1,79 m

Página 112

6. 260,26 m

7.

a. Es el ángulo del vértice donde está el observador. Tiene misma medida que el ángulo formado por el suelo y la hipotenusa.
b. Pregunta abierta.
c. Pregunta abierta.
d. Si x es la distancia hasta el objeto y α el ángulo medido, la altura h será $x\tan(\alpha)$.
e. Pregunta abierta.
f. Pregunta abierta.

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, geografía, astronomía, navegación, arquitectura.
b. Pregunta abierta, por ejemplo, simplifica los cálculos.

Página 113

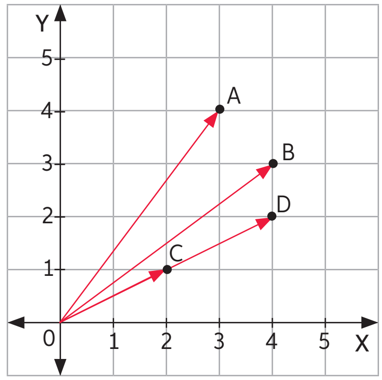
1.

a. Coseno y seno.
b. $|Tx| = 25\sqrt{3}$ y $|Ty| = 25$
c. $\sqrt{(25\sqrt{3})^2 + 25^2} = 50$

▶ Un vector tiene módulo, dirección y sentido.

Página 114

2.



a. Todos cumplen que el ángulo es igual a $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.
b. $|A| = 5$, $|B| = 5$, $|C| = \sqrt{5}$, $|D| = 2\sqrt{5}$. Notemos que $|A| = |B|$, ya que $x_A = y_B$ y $x_B = y_A$. Además, como $D = 2C$, tenemos que $|D| = 2|C|$.

3.

a. $V_x = 2$, $V_y = 4$, $U_x = 4$, $U_y = -1$
b. $|V| = 2\sqrt{5}$, $|U| = \sqrt{17}$
c. $\alpha = 26{,}57°$, $\beta = -14{,}04°$

▶ Notemos que el ángulo está a favor de las manecillas del reloj (hacia abajo), al usar el signo, el ángulo queda negativo reflejando esta información.

4.

a. $V_x = 100$, $V_y = 100\sqrt{3}$. Ambos son positivos, por lo tanto, el vector se encuentra en el primer cuadrante.
b. $W_x = -9\sqrt{2}$, $W_y = -9\sqrt{2}$. Ambos son negativos, por lo tanto, el vector se encuentra en el tercer cuadrante.
c. $T_x = -\frac{85\sqrt{3}}{2}$, $T_Y = \frac{85}{2}$. Componente x negativo y componente y positivo, por lo tanto, el vector se encuentra en el segundo cuadrante.
d. $U_x = 45$, $U_y = -45\sqrt{3}$. Componente x positivo y componente y negativo, por lo tanto, el vector se encuentra en el cuarto cuadrante.

5.

Vector	Magnitud (u)	X	Y
G	2,4	–1,7	1,7
H	1,6	1,23	1,03
I	1,3	1,22	0,45
J	2,1	1,26	–1,68
K	2,7	–2,34	–1,35

Página 115

6. Vector: $v = (40{,}18)$. Rapidez: $|v| = 43{,}86$ m/s. Dirección: 24,23°. Sentido: positivo.

7.

a. $v = (11\sqrt{3}, 11)$
b. El vector horizontal es $11\sqrt{3}$ m/s y el vector vertical es 11 m/s.
c. El vector horizontal es 30 m/s y el vector vertical es 2 m/s.
d. 30,07 m/s
e. 3,81°

8.

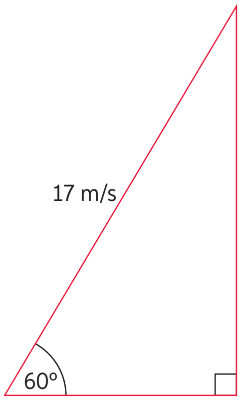
a. 15,77 km/h

b. 150,83 km/h

c. $\sqrt{150^2 + 15,77^2} = 150,83$

9.

a.

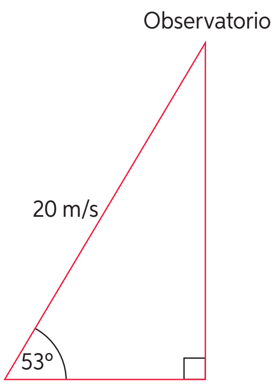


b. Componente horizontal: 8,5 m/s. Componente vertical: 14,72 m/s.

Página 116

10.

a.



b. Componente horizontal: 12,04 m/s. Componente vertical: 15,97 m/s.

11.

a. 35,36 km/h

b. 35,36 km/h

c. Componente horizontal: 5 km/h. Componente vertical: 8,66 km/h

d. 26,7 km/h al norte y 30,36 km/h al este, con una rapidez de 40,43 km/h.

12.

a. Debe generar una fuerza cuya componente vertical sea mayor al peso.

b. 56435,95

Para concluir:

c. Se puede determinar un vector a partir de sus componentes horizontal y vertical o a través de su módulo, sentido y dirección.

d. Para poder aplicar las razones trigonométricas.

Página 118

1.

a. 39584,06 km

b. 498 759 249,68 km^2. 124 689 812,42 km^2.

c. 12 419 566 607,65 km^3. 1 034 974 857 728,57 km^3.

2.

a. 25,13 m

b. 1 838 778,37 cm^3

c. 785,4 cm^3.

3. Volumen: 65499,85 L. Valor: $39 269 908,17.

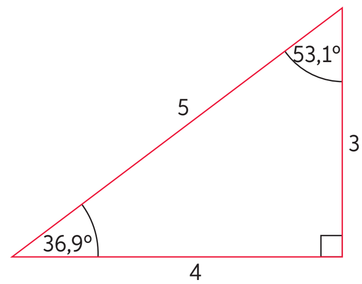
4. 4,78°

5. 68,2°

Página 119

6.

a.



b. Catetos: 21 cm y 21 cm, Hipotenusa: 29,7 cm Ángulos: 45°, 45° y 90°

c. Cateto: 14,3. Ángulos: 48,86°, 41,18° y 90°

7.

a.

Vector	Vx	VY
a	1	4
b	4	2
c	3	–2
d	0	–1
e	4	–1
u	–5	0
v	–4	–2
w	–2	2

b.

Vector	Ángulo (°)
a	75,96
b	26,57
c	–33,69
d	–90
e	–14,04
u	180
v	206,57
w	135

c. (1,2).

8. $U_x = 3$; $U_Y = 3$; $V_X = -4$; $V_Y = 3$; $W_X = -3$; $W_Y = -1$; $Z_X = 2$; $Z_Y = -4$

Unidad 4: Probabilidad y estadística.

Página 120

1. Pregunta abierta.
2. Edades de auditores, edades de seguidores del tío Rocker.
3. Pregunta abierta.

Página 121

4. Entre 21 y 60 si es posible. Mayor a 60 no.
5. Pregunta abierta.

Página 122

1.

- **a.** Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- **b.** Experimento aleatorio: Son los experimentos que no se pueden predecir los resultados.
- **c.** Probabilidad: Es la mayor o menor posibilidad de que ocurra un determinado proceso.
- **d.** Principio multiplicativo: es una técnica para resolver problemas de conteo.
- **e.** Diagramas de árbol: Es una representación gráfica de los posibles resultados del experimento.

2.

- **a.** (C,C,1)(C,C,2)(C,C,3)(C,C,4)(C,C,5)(C,C,6)(C,S,1) (C,S,2) (C,S,3)(C,S,4)(C,S,5)(C,S,6)(S,C,1) (S,C,2)(S,C,3)(S,C,4) (S,C,5)(S,C,6)(S,S,1) (S,S,2)(S,S,3)(S,S,4)(S,S,5)(S,S,6) y la cardinalidad es de 24.
- **b.** (R,C)(R,S)(A,C)(A,S)(Am,C)(Am,S) la cardinalidad es de 12.

3. Tiene 840 combinaciones.

4.

a. $\frac{6}{25}$ **b.** $\frac{12}{25}$ **c.** $\frac{5}{25}$ **d.** $\frac{20}{25}$

5.

- **a.** 29 alumnos obtuvieron nota azul.
- **b.** 32 alumnos obtuvieron nota inferior a 6.0
- **c.** La probabilidad es de $\frac{6}{30}$

6.

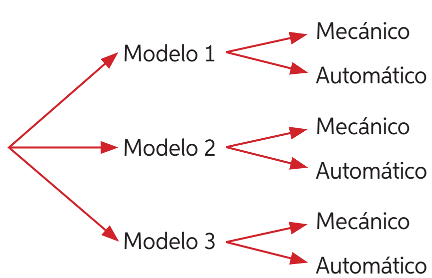
- **a.** La probabilidad es de $\frac{8}{52}$
- **b.** Se puede ordenar de 120 formas.
- **c.** La probabilidad es de $\frac{5}{6}$
- **d.** La probabilidad es de $\frac{1}{4}$.

Lección 10

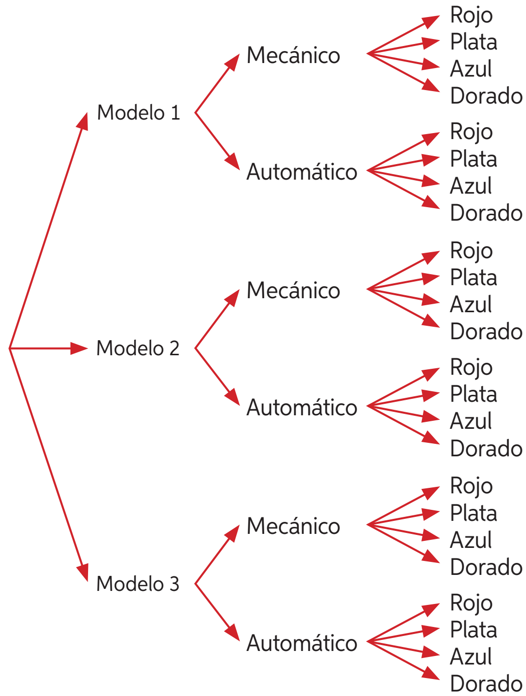
Página 123

1.

a.



- **b.** 6 opciones.
- **c.** Se multiplica la cantidad de elementos de cada conjunto. $3 \cdot 2 = 6$.
- **d.**



- **e.** 30 opciones.

▶ Pregunta abierta.

Página 124

▶ Cuando no hay demasiados casos posibles.

2.

- **a.** $5 \cdot 5 \cdot 5$
- **b.** 125 casos posibles.
- **c.** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ casos posibles.

▶ Influye en los casos posibles, con reposición tiene más casos posibles que sin reposición.

3.

- **a.** {H,M,E,R}; {H,M,R,E}; {H,E,M,R}; {H,E,R,M}; {H,R,E,M}; {H,R,M,E}; {M,H,R,E}; {M,H,E,R}; {M,E,H,R}; {M,E,R,H}; {M,R,H,E}; {M,R,E,H}; {E,M,R,H}; {E,M,H,R}; {E,H,M,R}; {E,H,R,M}; {E,R,M,H}; {E,R,H,M}; {R,H,M,E}; {R,H,E,M}; {R,E,H,M}; {R,E,M,H}; {R,M,H,E}; {R,M,E,H}.
- **b.** 2 casos posibles.
- **c.** 120 casos posibles.

4.

- **a.** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
- **b.** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
- **c.** 95 040 casos posibles.

Página 125

5.

- **a.** 72 opciones.
- **b.** 24 opciones
- **c.** 36 opciones.

6.

- **a.** 36
- **b.** 11 232 000
- **c.** 12 654 720
- **d.** Cada carácter tiene dos combinaciones. Entre más combinaciones, más segura es la clave.

Para concluir:

- **a.** Pregunta abierta, por ejemplo, para saber cuántas combinaciones hay entre diferentes conjuntos.
- **b.** Pregunta abierta.

Página 126

1.

- **a.** {ACDB}: {ACBD}; {ABCD}; {ABDC}; {ADBC}; {ADCB}; {BACD}; {BADC}: {BCAD}; {BCDA}; {BDAC}; {BDCA}; {CABD}; {CADB}; {CBDA}; {CBAD}; {CDAB}; {CDBA}; {DABC}; {DACB}; {DBAC}; {DBCA}; {DCAB}; {DCBA}.
- **b.** 24
- **c.** 2. Sí, una vez que se fija el orden de dos libros, solo se puede cambiar el orden de dos libros.
- **d.** $\frac{1}{4}$

Pregunta abierta, por ejemplo, se fija el primer libro, se fija el segundo libro, se permutan los otros dos. Se permuta el segundo libro y se permutan los otros dos. Así sucesivamente hasta que se tiene que permutar el primer libro y se repite el procedimiento.

Disminuye, ya que en la fórmula se aumenta el dividendo.

Página 127

2.

- **a.** 6
- **b.** 5040
- **c.** 362 880
- **d.** 240
- **e.** 42
- **f.** 79 833 600

3.

- **a.** Sin repetición.
- **b.** Con repetición.
- **c.** Sin repetición.
- **d.** Con repetición.

4.

- **a.** 720
- **b.** 48
- **c.** Pregunta abierta, por ejemplo, fijar a los hombres en un extremo, calcular las permutaciones, fijar a los hombres en el otro extremos, calcular las permutaciones y sumar los dos resultados. Equivalente a calcular las permutaciones de mujeres y multiplicar por dos.

5.

- **a.** 12
- **b.** Pregunta abierta.

6.

- **a.** 240
- **b.** Pregunta abierta, ver respuesta 4.c.
- **c.** 24

Pregunta abierta, por ejemplo, misma estrategia que dejando dos números en los extremos y sin contar el 4 para permutar.

7. $\frac{1}{12}$

Para concluir:

- **a.** Pregunta abierta, por ejemplo, operación para calcular la cantidad de formas en que se puede ordenar cierta cantidad de elementos y puede ser sin repetición, con repetición, circular.
- **b.** Pregunta abierta.

Página 128

1.

- **a.** Sí, ya que los premios dependen del orden de llegada de los tres primeros.
- **b.** 24
- **c.** $\frac{1}{4}$

En la cantidad de elementos que hay que elegir.

2.

- **a.** Variación sin repetición.
- **b.** 2
- **c.** $k = 3$ y $n = 5$

Página 129

- **d.** 60
- **e.** $\frac{1}{5}$
- **f.** $V_1^3 = 3$

Pregunta abierta, por ejemplo, el primer y segundo lugar quedan fijos por Alejandro y Jaime, por lo tanto, hay que permutar 3 elementos (los otros 3 ciclistas) en un solo lugar (el tercero en llegar para ganar bronce).

3.

- **a.** 42
- **b.** 5040
- **c.** 4 037 880
- **d.** 64
- **e.** 1296
- **f.** 11 390 625

4.

- **a.** 6
- **b.** 3
- **c.** 11
- **d.** 5
- **e.** 5
- **f.** 6

5.

- **a.** 720
- **b.** 60
- **c.** 24
- **d.** 456 976
- **e.** 600 000

6.

- **a.** Sin repetición, los votos son distintos.
- **b.** 504

7.

- **a.** 1728
- **b.** Varía en 19 008

Para concluir:

- **a.** Pregunta abierta.
- **b.** La cantidad de elementos a ordenar versus la cantidad posible de elementos.

Página 130

1.

- **a.** $n = 6$ y $k = 3$
- **b.** 120
- **c.** 6 órdenes distintos.
- **d.** No, no es posible.
- **e.** 20 triángulos.
- **f.** 20 triángulos.

Página 131

2.

- **a.** 70
- **b.** 20
- **c.** 252
- **d.** 6188
- **e.** 24310
- **f.** 462

3.

- **a.** 5
- **b.** 35

4.

- **a.** El primer juego.
- **b.** 52360
- **c.** 56
- **d.** 120

5.

- **a.** 1716
- **b.** 0,054
- **c.** 0,42

Para concluir:

- **a.** Pregunta abierta, por ejemplo, es un operador que permite saber de cuántas maneras de pueden ordenar k de n elementos sin que importe el orden.
- **b.** En la combinación no importa el orden.

Página 132

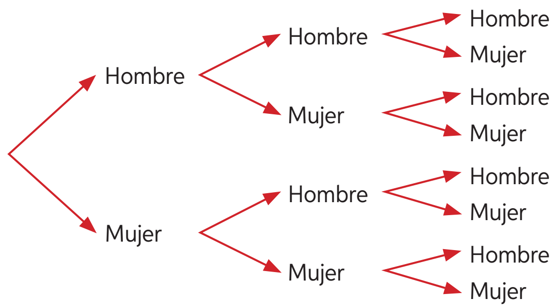
1.

a. Permutación sin repetición.
b. Variación sin repetición.
c. Variación sin repetición.
d. Combinación con repetición.
e. Variación con repetición.
f. Para 1 y 2 dígitos es variación con repetición. Para 3 dígitos es permutación con repetición.

Página 133

2.

a.



b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{3}{8}$ d. $\frac{1}{4}$

3.

a. 114
b. Si, ya que son anillos diferentes.
c. 60

4.

a. Variación con repetición.
b. 1000
c. $\frac{280}{1000}$

5.

a. 4 481 381 406 320
b. 5 567 902 560
c. 0,996

Página 134

6.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$
b. $15\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^4$

7. 384

8.

a. 66 partidos.
b. 11 fechas, un equipo debe jugar contra otros 11 equipos, pero solo contra uno por fecha.
c. 10 395
d. $\frac{3}{11}$

9.

a. Respuesta variable. Al lanzamiento de monedas, por ejemplo.
b. A: 4. B: 4. C: 7. D: 8. F: 11.
c. A: 1. B: 2. C: 35. D: 70. F: 462

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, en una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles?
b. En la variación con repetición importa el orden.
c. Pregunta abierta, por ejemplo, armar un equipo de fútbol entre varios amigos.

Página 135

a. 720
b. Pregunta abierta, es posible, pero poco probable.
c. Pregunta abierta, por ejemplo, muchas maneras de ordenar.
d. Pregunta abierta.
e. Pregunta abierta.
f. Pregunta abierta.

Lección 11

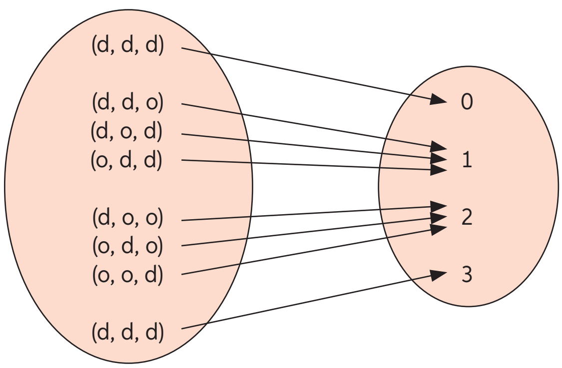
Página 136

1.

a. Combinatoria.
b. Caja A desocupada y caja B y C ocupadas, caja B desocupada y caja A y C ocupadas, caja C desocupada y caja A y B ocupadas. Caja A, B y C desocupadas.
c.

Combinación	Caja A	Caja B	Caja C	Ocupadas (cantidad)
1	D	D	D	0
2	D	D	O	1
3	D	O	D	1
4	D	O	O	2
5	O	D	D	1
6	O	D	O	2
7	O	O	D	2
8	O	O	O	3

d. Como mínimo, puede haber cero cajas ocupadas. No puede haber 4 cajas ocupadas, ya que son solo 3 cajas.
e. Tres.
f. No.
g.



El dominio son todos los elementos con forma {*x*, *y*, *z*} de las distintas combinaciones de *d* y *o*. El recorrido es {0, 1, 2, 3}

Página 137

La variable aleatoria es “Número de cajas ocupadas” y su recorrido es {0,1,2,3}

2.

- **a.** $\mathbb{R}^+$
- **b.** Tiene un recorrido con infinitos elementos.
- **c.** Si, son 4. No.
- **d.** El recorrido de la variable aleatoria Z no se puede definir fácilmente ya que no existe un máximo ni un mínimo (real) para esa variable ni tampoco es un valor entero.

$\mathbb{R}^+$.

Página 138

3.

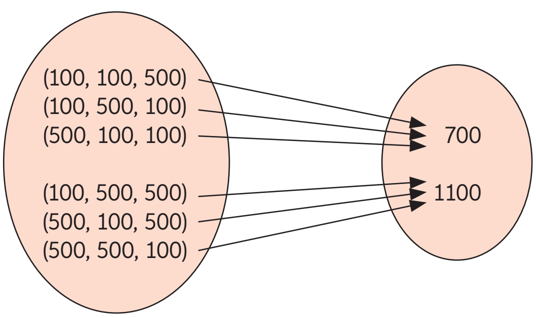
- **a.** Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}. V.a.: Cantidad de divisores que tiene el resultado de un dado. Recorrido: {1, 2, 3, 4}
- **b.** Ω={CU, CA; CD; CE; CR; CN; CO; UA; UD; UE; UR; UN; UO; AD; AE; AR; AN; AO; DE; DR; DN; DO; ER; EN; EO; RN; RO; NO}. V.a.: Cantidad de consonantes en 2 papeles. Recorrido: {0, 1, 2}
- **c.** Ω={5 y 3; 5 y 2; 3 y 3; 3 y 2}. V.a.: Suma de los números obtenidos. Recorrido: {8, 7, 5, 6}
- **d.** Ω={(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (1,7); (1,8); (1,9); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (2,7); (2,8); (2,9); (3,4); (3,5); (3,6); (3,7); (3,8); (3,9); (4,5); (4,6); (4,7); (4,8); (4,9); (5,6); (5,7); (5,8); (5,9); (6,7); (6,8); (6,9); (7,8); (7,9); (8,9)}. V.a.= La suma entre las dos bolas resultantes. Recorrido: {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17).

4.

- **a.** Finita.
- **b.** Finita.
- **c.** Infinita.
- **d.** Finita.

5.

- **a.** Ω={(100,100,500); (100,500,100); (500,100,100); (100,500,500); (500,100,500); (500,500,100)}.
- **b.** {700, 1100}.
- **c.**



Para concluir:

- **a.** El dominio de una variable aleatoria debe ser un espacio muestral.
- **b.** Combinatoria.

Página 139

1.

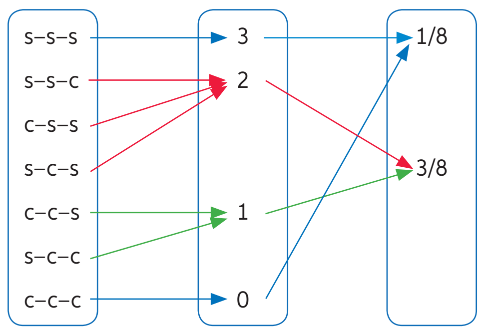
- **a.** Ω={(c,c,c); (c,c,s); (c,s,c); (s,c,c); (c,s,s); (s,c,s); (s,s,c); (s,s,s)}. 8 elementos.
- **b.** {0,1,2,3}
- **c.**

Valor	Casos favorables
0	1
1	3
2	3
3	1

- **d.** Casos favorables dividido por casos totales.
- **e.**

Valor	Probabilidad
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

- **f.** 3 caras con 3 sellos y 2 caras 1 sello con 1 cara 2 sellos. Tienen la misma cantidad de casos favorables.
- **g.** El resultado es 1. Esto se da ya que estamos considerando todos los casos favorables (es decir, el total de casos) sobre los casos totales.
- **h.**



- **i.** Si, relaciona un único valor de la preimagen con algún valor de la imagen.

Página 140

Pregunta abierta.

2.

- **a.** 36 elementos.

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

- **b.** {0,1,2}
- **c.** $P(X=0)=\frac{9}{36}$; $P(X=1)=\frac{18}{36}$; $P(X=2)=\frac{9}{36}$

3.

a. Ω={Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}

b. {3,4,5}

c. $P(X=3)=\frac{3}{7}$; $P(X=4)=\frac{3}{7}$; $P(X=5)=\frac{1}{7}$

Página 141

4.

a. Ω={(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6)}

$X=\{0,1,2\}$

$P(X=0)=\frac{6}{24}$; $P(X=1)=\frac{12}{24}$; $P(X=2)=\frac{6}{24}$

b. Ω={(b,b,b); (b,b,r); (b,b,n); (b,r,r); (b,r,n); (b,n,n); (r,r,r); (r,r,n); (r,n,n)}

$X=\{0,1,2,3\}$

$P(X=0)=\frac{3}{9}$; $P(X=1)=\frac{3}{9}$; $P(X=2)=\frac{2}{9}$; $P(X=3)=\frac{1}{9}$

5.

a. Ω={Enero, Febrero, Marzo, Abril, Mayo, Junio, Julio, Agosto, Septiembre, Octubre, Noviembre, Diciembre}

b. Pregunta abierta, por ejemplo, Z = El mes elegido corresponde a un mes de verano en el hemisferio sur. Recorrido: {SI,NO} que representaremos por SI = 1, NO = 0.$P(Z=0)=\frac{3}{4}$,$P(Z=1)=\frac{1}{4}$.

6.

a. −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3

b. $P(Y=-3)=\frac{6}{42}$. $P(Y\leq-5)=\frac{8}{42}$.

Página 142

7.

a. {0,1,2,3,4,5}

b. La probabilidad de que, al elegir un alumno al azar, éste tenga 5 atrasos.

c. 0,25. La suma de las probabilidades debe ser 1.

d. 0, 1, 2 y 3.

e. 0,75.

8.

a. {0, 1, 2, 3}

b. $\frac{11}{12}$

c.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

9.

a. $a=0,3$; $b=0,1$

b. 0,7

c. 0,4

Para concluir:

a. Pregunta abierta.

b. Hay que resolver el sistema de ecuaciones $a+b+0,6=1$ y $2a+b+0,3=1$.

Página 143

1.

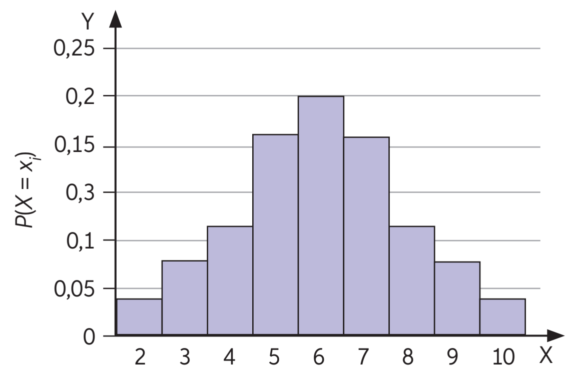
a. Ω={(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5)}

b. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

c.

X	$P(X=x_i)$
2	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{2}{25}$
4	$\frac{3}{25}$
5	$\frac{4}{25}$
6	$\frac{5}{25}$
7	$\frac{4}{25}$
8	$\frac{3}{25}$
9	$\frac{2}{25}$
10	$\frac{1}{25}$

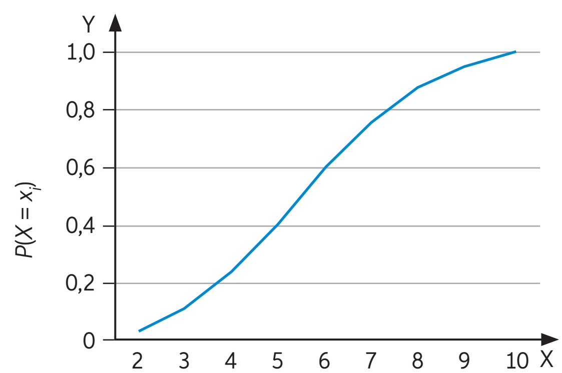
d.



e.

- 0,04
- 0,12
- 0,24
- 0,4
- 0,6
- 0,76
- 0,88
- 0,96
- 1

f.



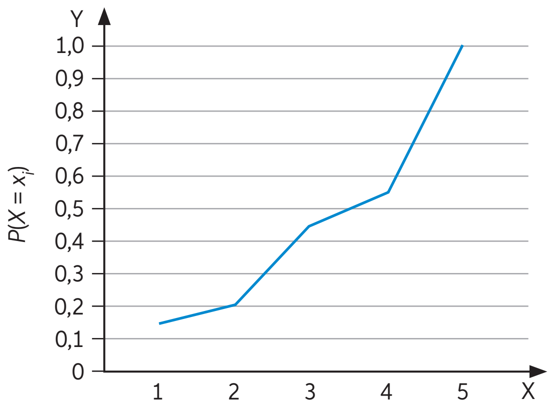
g. Pregunta abierta, por ejemplo, los dos ejes Y están entre 0 y 1, pero el segundo es creciente.

h. 1, contiene todos los casos posibles, por lo tanto, al sumarlos, se están sumando todas las probabilidades.

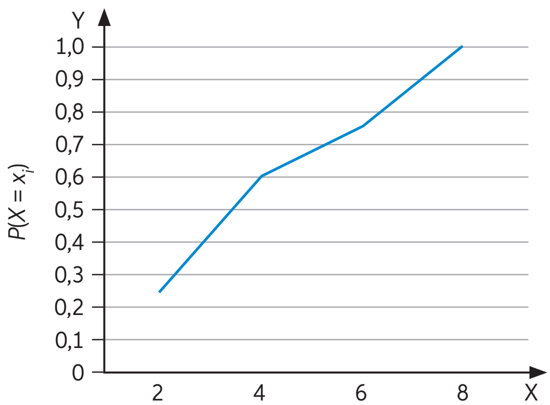
Página 144

2.

a.



b.

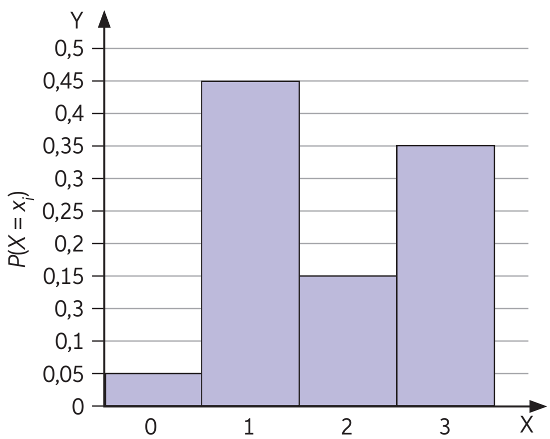


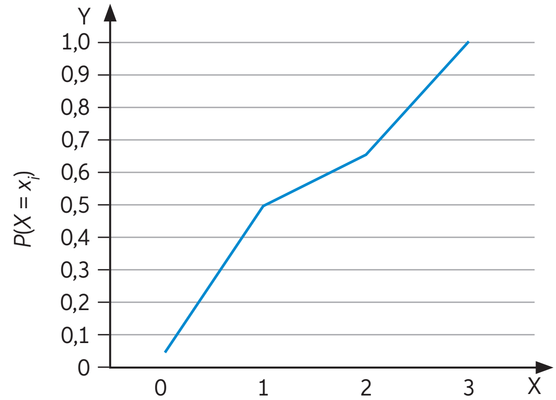
3.

a.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,05	0,5	0,65	1

b.





c. Al menos una mascota 0.95. A lo más dos mascotas 0.5

Página 145

4.

a.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=0)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X \le x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

b.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X \le x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{31}{32}$	1

c.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	1	2	3	4
$P(X \le x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

5.

a.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

b.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

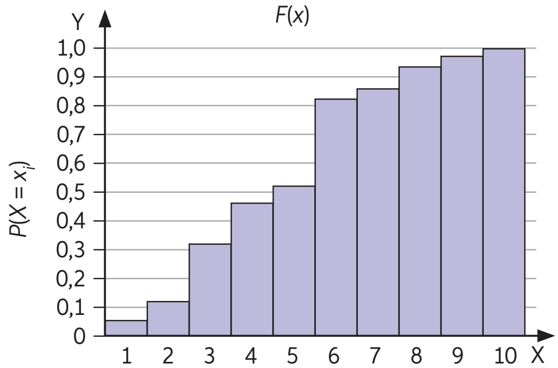
6.

a. 0,2

b.

x_i	$P(X\leq x_i)$
1	0,04
2	0,12
3	0,32
4	0,47
5	0,52
6	0,82
7	0,86
8	0,94
9	0,98
10	1

c.



d. 0,82

e. 0,62

f. Respuesta personal.

Página 146

7.

a. 5 fallas. 0 fallas.

b. 0,83

c. 0,45

d. 0,2

8.

a.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,275	0,15	0,43	0,145

b.

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	0,22	0,16	0,54	0,08

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, la función de probabilidad es para un valor en particular, la función acumulada es para intervalos.

b. Pregunta abierta.

Página 147

1.

a. Pregunta abierta, por ejemplo, número de caras al lanzar varias monedas, cantidad de autos que pasan por una calle en distintos días, horas dedicadas a hacer deporte de jóvenes en Chile.

b. Pregunta abierta, por ejemplo, el tiempo de demora en construir un edificio, masa de bebés al nacer, el tiempo de espera para la locomoción colectiva.

2. $\frac{50}{81}$

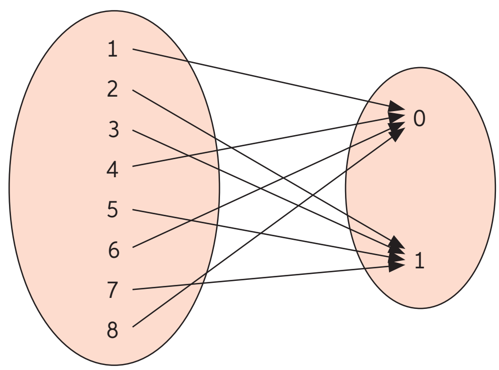
3.

a. $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b.

Dado (n°)”	1	2	3	4	5	6	7	8
Recorrido (primo o no primo)	0	1	1	0	1	0	1	0

c.



4.

a. X: {0,1,2,3}. Y:{0,1,2,3}

b.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{125}{1728}$	$\frac{525}{1728}$	$\frac{735}{1728}$	$\frac{343}{1728}$

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

c.

x_i	0	1	2	3
$P(X\leq x_i)$	$\frac{125}{1728}$	$\frac{650}{1728}$	$\frac{1385}{1728}$	1

y_i	0	1	2	3
$P(Y\leq y_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

5.

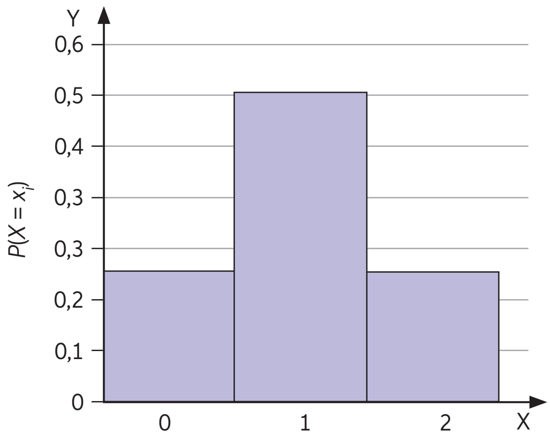
a. {0, 1, 2}

b.

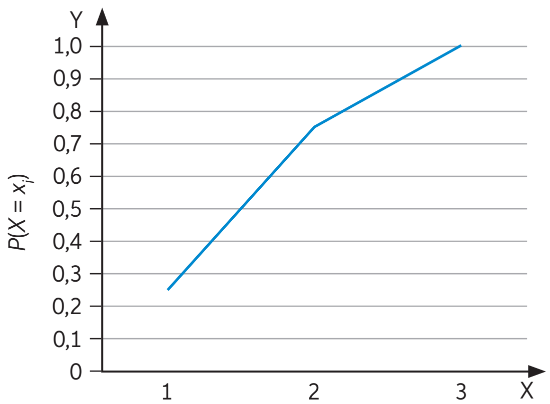
x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c. $P(X=1)=\frac{1}{2}$ y $P(X<2)=\frac{3}{4}$

d.



e.



Reflexiono:

a. Pregunta abierta.
b. Pregunta abierta.

Lección 12

Página 148

1.

a. 90 gr, 19 % coronarias, 22 % cardiovasculares, 14 % ACV, 14 % cáncer, 22 % afecciones respiratorias, 26 % infecciosas, 51 % diabetes.
b. La importancia de consumir cereales integrales para disminuir la probabilidad de padecer diversas enfermedades.
c. Conclusión 1: Verdadero. Conclusión 2: Falso. Conclusión 3: Verdadero.

Página 149

d. No necesariamente, ya que, como menciona el estudio, depende no solo de la alimentación sino de otros factores.

2.

a. 0,28
b. 2716 jóvenes
c. 9700 (total de jóvenes encuestados) por 0,28 (proporción que hace voluntariado).

Página 150

3.

a. 45 %
b. 12 %
c. Degradación del suelo.

4. Respuesta personal.

Para concluir:

a. Pregunta abierta.
b. Respuesta personal.

Página 151

1.

a. La tercera.
b. La primera.
c. Febrero ya que, los meses (en este orden) Diciembre-Enero-Febrero tienen una probabilidad menor a 0,07 alcanzando el tercer mes justamente en Febrero.

2.

a. Enero, Febrero, Marzo, Abril, Octubre, Noviembre, Diciembre.
b. 2 meses.
c. Febrero.

Página 152

3.

a. Mezcla números en porcentaje con números en decimales. Llevar todos los números al mismo sistema.
b. Empresa C.
c. Empresa C tiene la mayor puntualidad y casi la misma calidad que la empresa B (con mayor calidad). Debería elegir la empresa C.

4.

a. Fondo C. Fondo A.
b. Fondo B.

Página 153

c. Fondo B.
d. Si Martina quiere tener ganancias y no desea arriesgarse (tener pérdidas) conviene invertir un monto desde $1.000.000 hasta $2.999.999.

5.

a. $\frac{1}{4}$.
b.
  I. La situación más conveniente para ambos (sin traicionar al otro) es que ambos guarden silencio ya que tendrán solo 1 año de cárcel.
  II. Si uno de los dos no acepta el trato el escenario más favorable (para el otro) sería que el otro confesara.
c. La mejor opción depende del caso, lo que se puede representar de la siguiente forma (ya que los escenarios son equiprobables):
d. En un escenario equiprobable, todas las opciones tienen la misma probabilidad. La conveniencia depende del/los acusados ya que, dependiendo si existe traición o no, la ganancia es distinta.

Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, en la dirección estratégica de un negocio o en relaciones internacionales.
b. Pregunta abierta, por ejemplo, si debo llevar o no paraguas en un día nublado.

Página 154

1.

a. 16
b. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
c. $\frac{1}{16}$
d. $\frac{1}{16}$

Página 155

2.

a. Va tendiendo a 0,078.
b. 0,078
c. Tiene que ver con un nivel de creencia de la productora y no con un estudio realizado. Es decir, es una probabilidad subjetiva a diferencia de la anterior que es una probabilidad experimental.

3.

a. Probabilidad subjetiva.
b. Probabilidad real.
c. Probabilidad subjetiva.
d. Probabilidad experimental.
e. Probabilidad experimental.

Página 156

4.

a. No se entiende cómo completar el diagrama
b. La mejor decisión es cambiarse de puerta.
c. El concursante debe escoger la otra puerta. La probabilidad de ganar al cambiar de puerta es de $\frac{2}{3}$ y al mantenerla es de $\frac{1}{3}$.

▶ Probabilidad real.

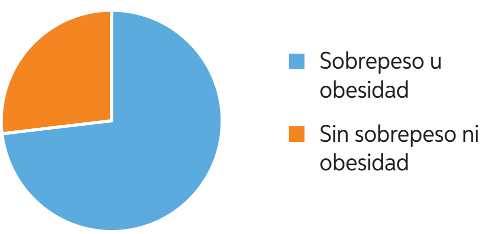
Para concluir:

a. Pregunta abierta, por ejemplo, yo creo que mi equipo de fútbol tiene una probabilidad alta de ganar el siguiente partido es probabilidad subjetiva, lanzar sucesivamente una moneda muchas veces y estimar la probabilidad de que salga cara es probabilidad experimental
b. Respuesta personal.

Página 157

1.

a. Pregunta abierta, por ejemplo, mala alimentación y sedentarismo.
b. Pregunta abierta, por ejemplo, tiene más sentido un gráfico de porcentaje de obesidad por país



2.

a. 1 127 personas.
b. La falta de ejercicio físico es uno de los factores que provoca sobrepeso y obesidad.
c. Como mínimo, 150 minutos semanales de actividad física aeróbica de intensidad moderada o 75 minutos de actividad física aeróbica vigorosa.

3. Pregunta abierta.

Página 158

1.

a. 5 290 000.
b. 10 497 600
c. Población chilena en el año 2007: 16.518.000. Está bien ya que, asumiendo que todo mayor de 18 años puede (eventualmente) tener 1 o 2 autos se podrían alcanzar la cantidad máxima de combinaciones de patentes.
d. Dependiendo cuál es la nomenclatura en cuestión sería: (cantidad de letras utilizadas)^6

2.

a. 720
b. Suponiendo que se admiten combinaciones que partan con "0" serían 5!/(5-3)! = 60.
c. 95 040

3.

a. $\frac{1}{36}$

Página 159

b. $\frac{5}{78}$
c. Debería salir una blanca.
d. $\frac{15}{16}$
e. 90 %

4.

a.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b.

x_i	$P(X=x_i)$
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{4}{36}$
8	$\frac{2}{36}$
9	$\frac{1}{36}$
10	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{4}{36}$
15	$\frac{2}{36}$
16	$\frac{1}{36}$
18	$\frac{2}{36}$
20	$\frac{2}{36}$
24	$\frac{2}{36}$
25	$\frac{1}{36}$
30	$\frac{2}{36}$
36	$\frac{1}{36}$

5.

a. m = 0,15
b. 0,35
c. Pregunta abierta.

6.

a. Pregunta abierta.
b. Pregunta abierta.

Bibliografía

ÁLVAREZ, R. (2013). *Conjuntos numéricos y aritmética*. Colombia: Universidad de Medellín.

ENGLER, A., GREGORINI, M., MÜLLER, D. y VRACKEN, S. (s/f). *Lo errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad del Litoral, Argentina. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/228584198_Los_errores_en_el_aprendizaje_de_matematica

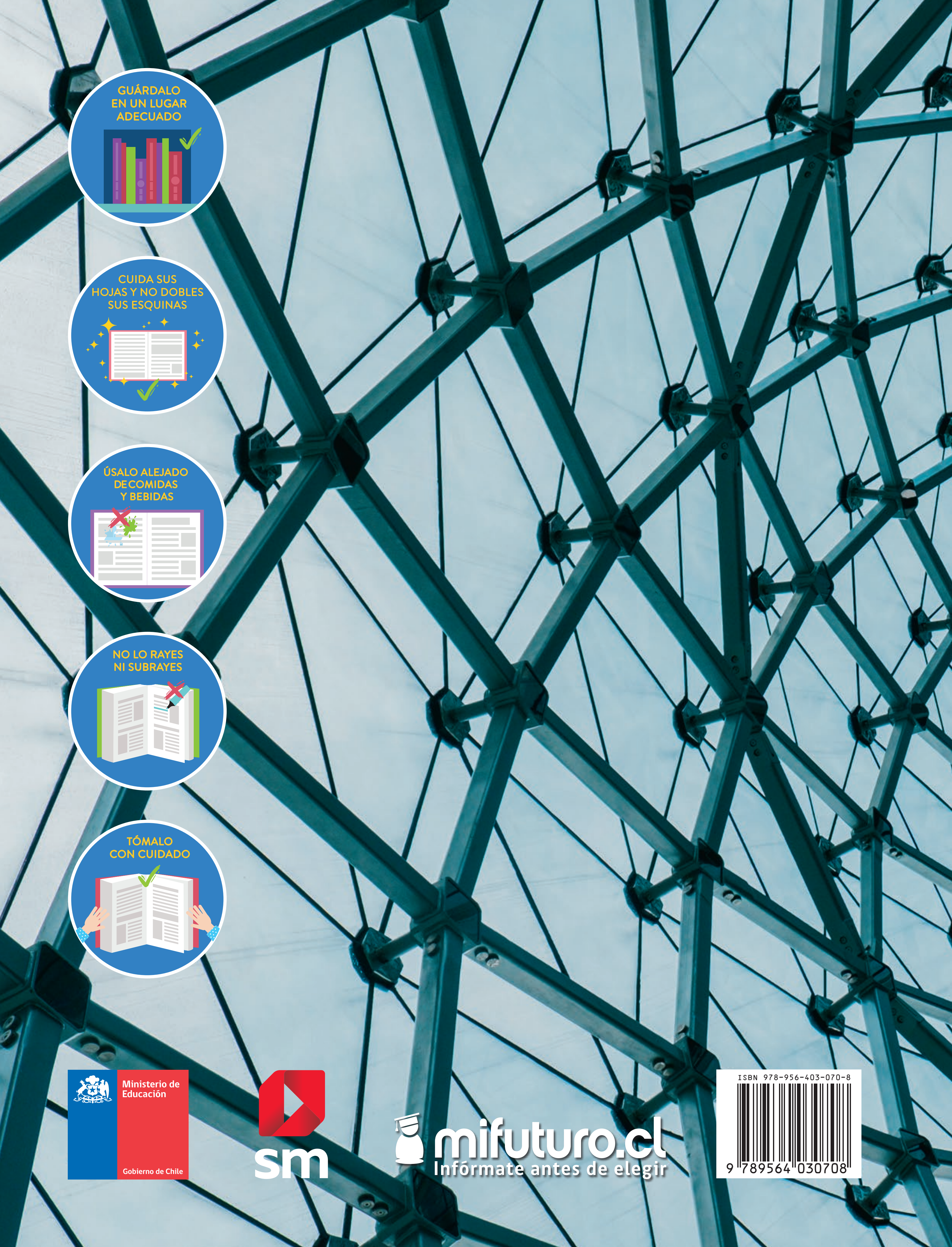
MINISTERIOR DE EDUCACIÓN (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. República de Chile. Santiago de Chile.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2016). *Programa de Estudio Segundo medio*. República de Chile. Santiago de Chile.

Navas, Andrés (2017). Lecciones de matemáticas para el recreo. Editorial Planeta. Santiago de Chile.

Sitios web

- Curriculum Nacional: http://www.curriculumnacional.cl/
- Educación: www.educarchile.cl
- Geogebra: www.geogebra.org
- Ministerio de Educación: www.mineduc.cl
- Conicyt Explora: https://www.conicyt.cl/
- Real Academia Española de la Lengua: http://www.rae.es
- NASA: https://www.nasa.gov/
- PhET: https://phet.colorado.edu/es/



GUÁRDALO EN UN LUGAR ADECUADO

CUIDA SUS HOJAS Y NO DOBLES SUS ESQUINAS

ÚSALO ALEJADO DE COMIDAS Y BEBIDAS

NO LO RAYES NI SUBRAYES

TÓMALO CON CUIDADO

ISBN 978-956-403-070-8
9 789564 030708